Exo 1. $\frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+3i-3}{1^2+1^2} = \boxed{-1+2i}$

Exo 2. 1) $z_1 = 3i$ $\quad |z_1| = 3$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

2) $z_2 = -6$ $\quad |z_2| = 6$ et $\arg(z_2) = \pi$ donc $\boxed{z_2 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)}$

3) $z_3 = -1+\sqrt{3}\,i$ $\quad |z_3| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

$$\begin{cases} 2\cos\theta = -1 \\ 2\sin\theta = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

donc $\boxed{z_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

Exo 3. $|z-3i| = 4 \iff AM = 4$ avec $A(3i)$ et $M(z)$

L'ensemble cherché est le cercle $\mathcal{C}(A(3i);4)$.

Exo 4 1)

x	$-\infty$	α	0
f	$-\infty$ ↗	0	↗ 1

D'après le TV de f complété $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;0]$

2)

x	$-0{,}6$	α	$-0{,}5$
f	$\approx -0{,}051$ ↗	0	↗ $\approx 0{,}1065$

donc $\boxed{-0{,}6 \leq \alpha \leq -0{,}5}$

Exo 5. (I) $2iz+5 = iz+3i \iff 2iz - iz = -5+3i$

$\iff iz = -5+3i \iff z = \frac{-5+3i}{i} \iff z = \frac{(-5+3i)\times i}{i^2}$

$\iff \boxed{z = 3+5i}$

(II) On pose $z = x+iy$ avec $x;y \in \mathbb{R}$

$z + 2\bar{z} = 3+5i \iff x+iy+2(x-iy) = 3+5i$

$\iff 3x - yi = 3+5i \iff \begin{cases} 3x = 3 \\ -y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$

donc $\boxed{z = 1-5i}$

(III) $Z = z\bar{z} - 2z + 2i = (x+iy)(x-iy) - 2(x+iy) + 2i$ avec $z = x+iy$, $x;y \in \mathbb{R}$

$= x^2+y^2-2x-2yi+2i = x^2+y^2-2x+(2-2y)i$

Z est imaginaire pur ssi $\mathrm{Re}(Z) = 0$ ssi $x^2+y^2-2x = 0$

ssi $(x-1)^2+y^2 = 1$

L'ensemble cherché est le cercle $\mathcal{C}(A(1;0);1)$

Exo 6. 1) $(1+i)^6 = -8i$ donc $[(1+i)^3]^2 = -8i$

donc $z_1 = (1+i)^3 = \boxed{-2+2i}$ est une solution de (E).

2) $\left(-(1+i)^3\right)^2 = -8i$ donc $z_2 = -(1+i)^3 = \boxed{2-2i}$ est l'autre solution de (E).