Exo 1 : Hypothèses : $a \equiv b(7)$ et $c \equiv d(7)$

donc il existe k et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a-b=7k$ et $c-d=7k'$

$a+c-(b+d) = a+c-b-d = \underline{a-b} + \underline{c-d} = 7k+7k' = 7(k+k')$

donc 7 divise $a+c-(b+d)$ donc $a+c \equiv b+d\ (7)$ cqfd

Exo 2 : 1) • $n=0$: $4^0-1=0$ est divisible par 3 donc la propriété est vraie pour $n=0$

• HR : 3 divise 4^n-1 càd il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n-1=3k$

On veut démontrer que : $4^{n+1}-1=3k'$

$4^{n+1}-1 = 4^n \times 4 - 1 = (3k+1)\times 4 - 1$ car par HR : $4^n = 1+3k$

$= 12k+4-1 = 12k+3 = 3(4k+1) = 3k'$

avec $k' = 4k+1$

• donc 4^n-1 est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $4 \equiv 1(3)$ donc $4^n \equiv 1^n(3)$ donc $4^n \equiv 1(3)$ donc 3 divise 4^n-1 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exo 3 : Disjonction de cas :

1er cas : $\boxed{n \equiv 0(2)}$ $n^5-n+6 \equiv 6(2)$ or $6 \equiv 0(2)$

donc $n^5-n+6 \equiv 0(2)$ donc n^5-n+6 est divisible par 2

2e cas : $\boxed{n \equiv 1(2)}$ $n^5-n+6 \equiv 1^5-1+6\,(2) \equiv 6(2) \equiv 0(2)$

donc $n^5-n+6 \equiv 0(2)$ donc n^5-n+6 est divisible par 2

Exo 4 : 1) $10^{3n}-1 = 10^{3n}-1^3 = (10^n)^3-1^3$

$= (10^n-1)\left[(10^n)^2+10^n\times 1+1^2\right] = (10^n-1)\underbrace{(10^{2n}+10^n+1)}_{\in \mathbb{Z}}$

donc 10^n-1 divise $10^{3n}-1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $10 \equiv 1(3)$ donc $10^{2n}+10^n+1 \equiv 1^{2n}+1^n+1\,(3) \equiv 3(3) \equiv 0(3)$

donc 3 divise $10^{2n}+10^n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) a) $u_n = \dfrac{1-10^{(n-1)+1}}{1-10} = \dfrac{1-10^n}{-9}$ car $1+q+q^2+\dots+q^N = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$= \dfrac{10^n-1}{9}$

b) $u_{3n} \underset{\text{d'après a)}}{=} \dfrac{10^{3n}-1}{9} \underset{\text{d'après 1)}}{=} \dfrac{(10^n-1)(10^{2n}+10^n+1)}{9} = \dfrac{10^n-1}{9} \times (10^{2n}+10^n+1)$

donc $u_{3n} = u_n \times (10^{2n}+10^n+1)$ or $10^{2n}+10^n+1 = 3k$ d'après 2)

donc $u_{3n} = u_n \times 3k$ donc $3u_n$ divise u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.