1

Exo 1

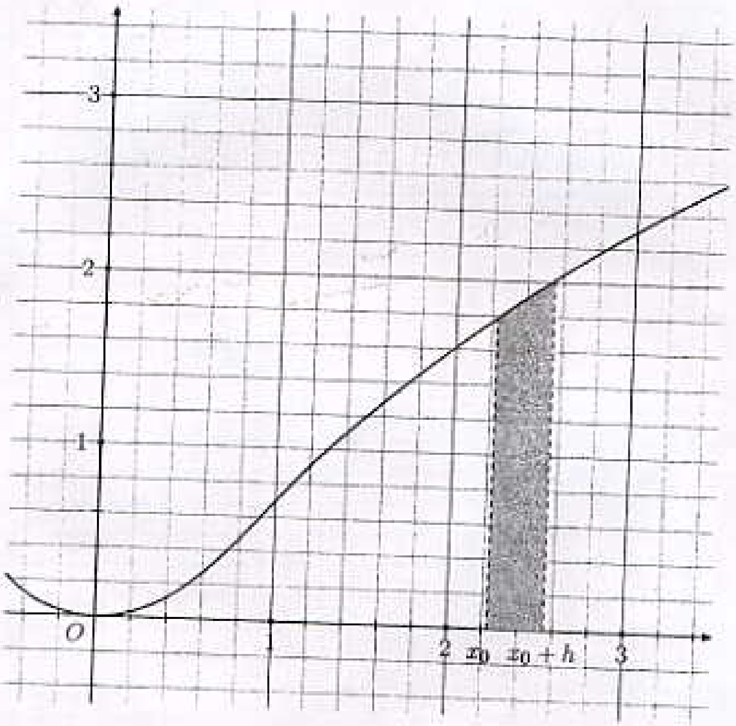
Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

Définition : H est une primitive de h sur un intervalle I si et seulement si H est dérivable sur I et si pour tout x de I on a $H'(x) = h(x)$.

Dans la suite on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \ln(t^2 + 1)$.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est représentée ci-dessous :

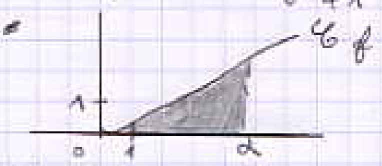


Pour $\alpha \geqslant 0$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$. Ecrire $A(\alpha)$ sous forme d'intégrale et faire un schéma.

3. Soit x_0 un réel strictement positif.
   (a) Soit h un réel strictement positif . En utilisant des rectangles convenablement choisis, établir l'encadrement :
   $$\ln\left(1 + x_0^2\right) \leqslant \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leqslant \ln\left(1 + (x_0 + h)^2\right).$$
   (b) Quel encadrement peut on obtenir de la même manière pour $-x_0 \leqslant h < 0$?
   (c) **Démontrer** que la fonction A est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de A en x_0 ?
4. Quel lien a-t-on établi entre les fonctions A et f sur $[0, +\infty[$?

Exo : 1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ donc f est continue sur $[0;+\infty[$

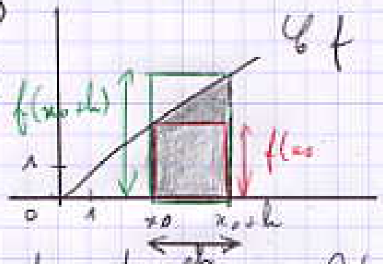
2) $f'(t) = \dfrac{2t}{t^2+1} \geq 0$ sur $[0;+\infty[$ donc f est ↗ sur $[0;+\infty[$



$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt.$$

3) (a)

$h>0$



$\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)$ est l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_0+h$

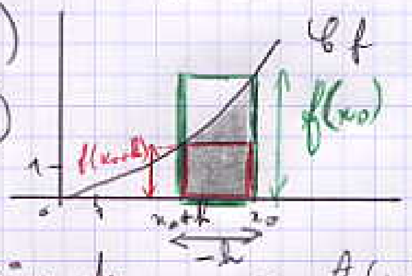
aire du rectangle rouge $\leq \mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) \leq$ aire du rectangle vert

$$h\, f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h\, f(x_0+h)$$

or $h>0$ donc $\boxed{f(x_0) \leq \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)}$

(b)

$h<0$



aire du rectangle rouge $\leq \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0+h) \leq$ aire du rectangle vert

$$-h\, f(x_0+h) \leq \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0+h) \leq -h\, f(x_0)$$

or $h<0$ donc $-h>0$ d'où :

$$f(x_0+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0+h)}{-h} \leq f(x_0)$$

donc $\boxed{f(x_0+h) \leq \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0)}$

(c) D'après (a) :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0+h) \text{ pour } h>0$$

f est continue en x_0 donc $\lim_{h \to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$

$\lim_{h \to 0^+} f(x_0) = f(x_0)$

donc d'après le théo des gendarmes : $\lim_{h \to 0^+} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$

D'après (b)

$$f(x_0+h) \leq \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0) \text{ pour } h<0$$

f est continue en x_0 donc $\lim_{h \to 0^-} f(x_0+h) = f(x_0)$

$\lim_{x \to 0^-} f(x_0) = f(x_0)$

donc d'après le théo des gendarmes : $\lim_{h \to 0^-} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$

(d) $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)}$ donc A est dérivable en x_0 de nombre dérivé $A'(x_0) = f(x_0)$

4) On a donc démontré que A est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.