Partie A

$p(G) = \dfrac{\binom{3}{2}+\binom{7}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \dfrac{34}{105}$ car $\{2N\}$ ou $\{2B\}$ ou $\{2R\}$

Partie B

1. $g(n,b,r) = \dfrac{\binom{n}{2}+\binom{b}{2}+\binom{r}{2}}{\binom{15}{2}} = \dfrac{\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{b(b-1)}{2!}+\frac{r(r-1)}{2!}}{105}$

$= \dfrac{n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)}{2} \times \dfrac{1}{105}$

$= \dfrac{1}{210}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$

2. a) soit P un plan d'équation $x+y+z-15=0$

$15+0+0-15=0$ donc $N \in P$
$0+15+0-15=0$ donc $B \in P$
$0+0+15-15=0$ donc $R \in P$

$\overrightarrow{NB}\begin{pmatrix}0-15\\15-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\15\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NR}\begin{pmatrix}0-15\\0-0\\15-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\0\\15\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-15 = 1\times(-15)\\ 15 \neq 1\times 0\end{cases}$ donc $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NR}$ pas colinéaires donc N,B,R pas alignés

donc N,B,R définissent un plan donc P=(NBR) donc

(NBR) : $x+y+z-15=0$

b) $n\begin{pmatrix}n\\b\\r\end{pmatrix}$ or n, b et r sont le nombre respectif de boule noire, blanche et rouge et l'urne contient 15 boules

donc $n+b+r=15$

$n+b+r-15 = 15-15 = 0$ donc $n \in (NBR)$

c. $g(n,b,r) = \frac{1}{210}\left[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)\right]$

$= \frac{1}{210}\left[n^2 - n + b^2 - b + r^2 - r\right]$

or $M \in (NBR)$ donc $n+b+r-15=0$
donc $n+b+r = 15$
donc $-n-b-r = -15$

donc $g(n,b,r) = \frac{1}{210}\left(n^2+b^2+r^2-15\right)$

or $OM = \sqrt{(n-0)^2+(b-0)^2+(r-0)^2}$
$= \sqrt{n^2+b^2+r^2}$
donc $OM^2 = n^2+b^2+r^2$

donc $g(n,b,r) = \frac{1}{210}\left(OM^2-15\right)$

d. $(OH) \perp (NBR)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (OH) car $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal à (NBR)
donc $(OH) : \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

or H est l'intersection de (OH) et du plan (NBR), donc

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x+y+z-15=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ t+t+t-15=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 5 \\ t = 5 \end{cases}$ donc $H\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$

e. $g(n,b,r) = \frac{1}{210}\left(OM^2-15\right)$ le plus petit possible donc OM doit être le plus petit possible

or OH est la distance la plus courte de O à (NBR) car H est le projeté orthogonal de O sur (NBR)
donc $M = H$
or $OM^2 = n^2+b^2+r^2$ et $OH^2 = 5^2+5^2+5^2$
donc $\begin{cases} n^2 = 5^2 \\ b^2 = 5^2 \\ r^2 = 5^2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} n = 5 \\ b = 5 \\ r = 5 \end{cases}$ sont les valeurs de n, b et r afin que g(n, b, r) soit minimale

donc $g(5,5,5) = \frac{1}{210}\left(5^2+5^2+5^2-15\right) = \frac{1}{210}(75-15) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$

donc la probabilité minimale est de $\frac{2}{7}$

Partie C

1) $p(G) = \frac{2}{7}$ $\qquad$ $p(\bar{G}) = \frac{5}{7}$

x_i	$kx - x$	$-x$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

$E(X) = \frac{2}{7}(kx - x) - \frac{5}{7}x$

2) le jeu est équitable ssi $E(X) = 0$

ssi $\frac{2}{7}(kx - x) - \frac{5}{7}x = 0$

ssi $\frac{2}{7}kx - \frac{2}{7}x - \frac{5}{7}x = 0$

ssi $\frac{2}{7}kx - x = 0$

ssi $x\left(\frac{2}{7}k - 1\right) = 0$

soit $x = 0$, ce qui est impossible

soit $\frac{2}{7}k - 1 = 0 \iff k = \frac{7}{2} = 3{,}5$

donc pour $k = 3{,}5$, le jeu est équitable