Exercice 1:

1) • $z_0 = 2$ • $\frac{1+i}{2} z_n = z_{n+1}$

Où est le dessin ?

- $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1+i.$

0,5 / 1

- $z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} \times (1+i) = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$

- $z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2} \times i = \frac{i+i^2}{2} = \frac{-1+i}{2}.$

- $z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = \frac{1+i}{2} \times \frac{-1+i}{2} = \frac{-1+i-i+i^2}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ donc z_4 est un réel.

2) $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

$|z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2} z_n\right|$

$|z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$ or $u_n = |z_n|$ donc $u_{n+1} = |z_{n+1}|$

$u_{n+1} = \left|\frac{1+i}{2}\right| u_n$ de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = \left|\frac{1+i}{2}\right|$

Donc (u_n) est géométrique de raison $\left|\frac{1+i}{2}\right|$.

Comme (u_n) est géométrique on a $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_n = 2 \times \left(\left|\frac{1+i}{2}\right|\right)^n$$

Or $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

3) $OA_n \leq 0,1$

$|z_n| \leq 0,1$

$u_n \leq 0,1$

$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,1$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,05$

tout est positif :

$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \ln 0,05$

$n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \ln 0,05$

$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ car $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0,35 < 0$

$n \geq 8,64$

$n \geq 9$

donc $n_0 = 9$

A partir de $n_0 = 9$ tous les point A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon $0,1$.

4) a) $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{\frac{1+i-2}{2} z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{-1+i}{2} z_n \times \frac{2}{(1+i) z_n}$

$= \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+i-i^2}{1^2+1^2}$

$= \frac{2i}{2} = i$

$\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(i) = 90°$

Or $\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = (\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$

Géométriquement c'est l'angle $\widehat{OA_{n+1}A_n}$. Donc $\widehat{OA_{n+1}A_n} = 90°$.

Donc le triangle OA_nA_{n+1} est est triangle rectangle en A_{n+1}.

Or $\left|\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right| = |i|$

$\frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_{n+1}|} = 1$

$\frac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1$

$A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$

Donc OA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_{n+1}.

b) $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$

$= |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \ldots + |z_n - z_{n-1}|$

$= \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)z_0 - z_0\right| + \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)z_1 - z_1\right| + \ldots + \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)z_{n-1} - z_{n-1}\right|$

$= \left|z_0\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)\right| + \left|z_1\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)\right| + \ldots + \left|z_{n-1}\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)\right|$

$= \left|z_0\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right| + \left|z_1\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right| + \ldots + \left|z_{n-1}\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right|$

$= |z_0| \times \left|\frac{-1+i}{2}\right| + |z_1| \times \left|\frac{-1+i}{2}\right| + \ldots + |z_{n-1}| \times \left|\frac{-1+i}{2}\right|$

$= \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times (|z_0| + |z_1| + \ldots + |z_{n-1}|)$

Or $|z_n| = u_n$

D'où $\ell_n = \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})$

$= \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times \left(2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 + 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + \ldots + 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$

$= 2\left|\frac{-1+i}{2}\right| \times \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$

$= 2\left|\frac{-1+i}{2}\right| \times \left[\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1+1}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right]$

$= 2 \times \frac{|-1+i|}{|2|} \times \left[\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}\right]$ or $|-1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right] \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$\ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$ ✓

0,5 / 1

$\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = ?$

• $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ car $-1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1$ $<$ $<$ faux ! Inégalités strictes !

• $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times 1 = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$. ✓

Exercice 2 :

PARTIE A :

1) $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left[3 - \ln(f(t))\right]$ ssi $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left[3 - g(t)\right]$ car $g = \ln f$

ssi $f'(t) = -\frac{3}{20} f(t) + \frac{1}{20} f(t) g(t)$

ssi $\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20} g(t)$

Or $g = \ln f$ d'où $g' = \frac{f'}{f}$ ~~donc~~ ssi $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$

2) $(H) : z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}$

$g_k(t) = Ce^{\frac{1}{20}t} + \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = Ce^{t/20} + \frac{3}{20} \times \frac{20}{1} = Ce^{t/20} + 3$

Les solutions de (H) sont les fonctions $g_k(t) = Ce^{t/20} + 3$

3) $g_k(t) = Ce^{t/20} + 3$

$\ln f(t) = Ce^{t/20} + 3$

$e^{\ln f(t)} = e^{Ce^{t/20} + 3}$

$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$

On la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \to e^x$

4) a) $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] = ?$

- $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{20} = +\infty$ • $\lim_{T \to +\infty} e^T = +\infty$ D'après la limite d'une composée :

- $\lim_{t \to +\infty} e^{t/20} = +\infty$ d'où $\lim_{t \to +\infty} 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$

- $\lim_{T \to -\infty} e^T = 0$ D'après la limite d'une composée :

- $\lim_{t \to +\infty} \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] = 0$ Donc • $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

PARIS
Justine
TS3

b) $f'(t) = -3 \times \frac{1}{20} \exp\left(\frac{t}{20}\right) \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$

$= \frac{-3}{20} \exp\left(\frac{t}{20}\right) \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$

$= -\frac{3}{20} \exp\left[\frac{t}{20} + 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$

• $\exp\left[\frac{t}{20} + 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] > 0$ car $e^{\wedge} > 0$

• $-\frac{3}{20} \exp\left[\frac{t}{20} + 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1	0

$f(0) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{0}{20}\right)\right]$

$= \exp[3 - 3\exp 0]$

$= \exp(0) = 1$

c) $f(t) < 0{,}02$

$\exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0{,}02$ tout est positif

$\ln\left(\exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]\right) < \ln 0{,}02$

$3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln 0{,}02$

$-3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0{,}02) - 3$

$\exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{\ln(0{,}02) - 3}{-3}$ car $-3 < 0$

Or $\frac{\ln(0{,}02) - 3}{-3} \approx 2{,}3 > 0$ donc tout est positif

$\ln\left[\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] > \ln\left[\frac{\ln(0{,}02) - 3}{-3}\right]$

$\frac{t}{20} > \ln\left[\frac{\ln(0{,}02) - 3}{-3}\right]$

$t > 20 \ln\left[\frac{\ln(0{,}02) - 3}{-3}\right]$

Or $20 \ln\left[\frac{\ln(0{,}02) - 3}{-3}\right] \approx 16{,}69$

1,5/2

Donc $t \geq 17$ Au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à
faux 20 individus.