Exo 2 :

1) $\bullet$ $\lim_{x\to+\infty} x+3 = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

2) a) $n \le x \le n+1$ or f est $\downarrow$ sur $[0;+\infty[$ donc $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$

donc $\boxed{f(n+1) \le f(x) \le f(n)}$

b) On intègre l'inégalité du 2)a) de n à $n+1$ avec $n \le n+1$:

donc $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx$

donc $f(n+1)\int_n^{n+1} 1\,dx \le u_n \le f(n)\int_n^{n+1} 1\,dx$ (linéarité)

or $\int_n^{n+1} 1\,dx = [x]_n^{n+1} = (n+1) - n = 1$

donc $\boxed{f(n+1) \le u_n \le f(n)}$

c) $\bullet$ $f(n+1) \le u_n \le f(n)$

$\bullet$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (d'après 1)) donc $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$

$\bullet$ $\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$

donc d'après le théo des gendarmes (u_n) converge vers 0

3) a) $F'(x) = 2 \times \frac{1}{x+3} \ln(x+3) = \boxed{2f(x)}$

b) $I_n = \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n \frac{1}{2}F'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^n F'(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}[F(x)]_0^n = \boxed{\frac{[\ln(n+3)]^2 - [\ln 3]^2}{2}}$

4) $\bullet$ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$

$= \int_0^n f(x)\,dx = I_n = \boxed{\frac{[\ln(n+3)]^2 - [\ln 3]^2}{2}}$ (Chasles)

$\bullet$ $\lim_{n\to+\infty} n+3 = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+3) = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} [\ln(n+3)]^2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$

donc (I_n) n'est pas convergente.