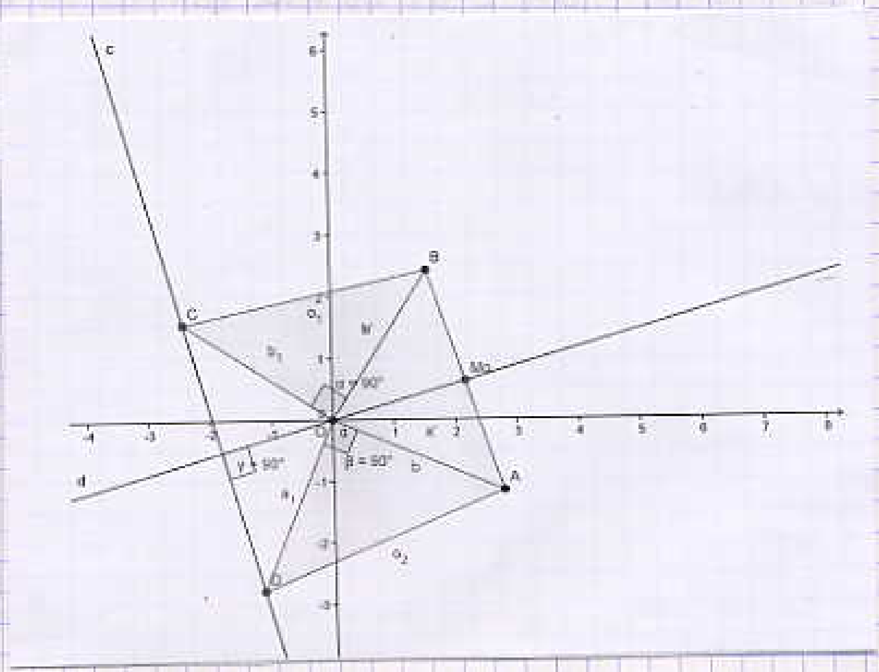


Conjecture : - (OM) et (DC) sont perpendiculaires
- 2OM = DC

* On va démontrer que (OM) et (DC) sont perpendiculaires

. A (a) ; B (b) ; C (c) ; D (d) ; M (m)

. M est le milieu de [AB] donc $m = \frac{a+b}{2}$

. AOD est rectangle et isocèle en O

$\Leftrightarrow R\left(O ; -\frac{\pi}{2}\right) : A \rightarrow D$

$\Leftrightarrow$ $d - o = e^{i \cdot -\frac{\pi}{2}} \times (a - o)$

$\Leftrightarrow$ $d = -ia$ car $e^{i \cdot -\frac{\pi}{2}} = -i$

- OBC est isocèle et rectangle en O

$\Leftrightarrow$ $R\left(O(o) ; \frac{\pi}{2}\right) : B \to C$

$\Leftrightarrow$ $c - o = e^{i\frac{\pi}{2}} \times (b - o)$

$\Leftrightarrow$ $c = ib$ car $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

- $\vec{OM}\,(m - o)$ donc $\vec{OM}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\vec{DC}\,(c - d)$. or $c - d = ib + ia$ car $c = ib$ et $d = ia$

donc $\vec{DC}\,(i(a+b))$

- $(\vec{OM} ; \vec{DC}) = \arg\left(\frac{c-d}{m-o}\right)$

$= \arg\left(\frac{ib+ia}{\frac{a+b}{2}}\right)$

$= \arg\left(\frac{i\cancel{(a+b)} \times 2}{\cancel{a+b}}\right)$

$= \arg(2i)$

$= \frac{\pi}{2}$

donc $(\vec{OM} ; \vec{DC}) = \frac{\pi}{2}$ donc (OM) et (DC) sont perpendiculaires

* On va démontrer que $DC = 2\,OM$ c'est-à-dire $\frac{DC}{OM} = 2$

$\frac{DC}{OM} = \frac{|c-d|}{|m|} = \left|\frac{c-d}{m}\right|$ car $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$= \left|\frac{i(a+b)}{\frac{a+b}{2}}\right|$ car $c - d = i(a+b)$ et $m = \frac{a+b}{2}$

$= \left|\frac{2i\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}}\right|$

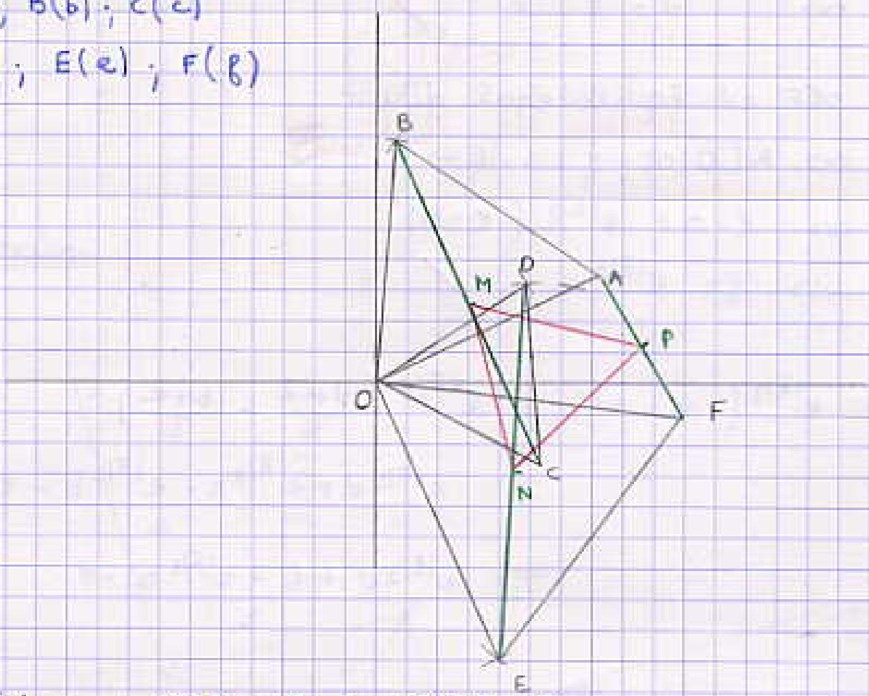
$= |2i| = 2$

donc $\frac{DC}{OM} = 2$ donc $DC = 2OM$

Problème ouvert

$A(a)$; $B(b)$; $C(c)$

$D(d)$; $E(e)$; $F(f)$



conjecture : MNP est équilatéral

On veut démontrer que :

MNP équilatéral $\Leftrightarrow R(M ; \frac{\pi}{3}) : N \to P$

$\Leftrightarrow p - m = e^{i\pi/3}(n - m)$

. M est le milieu de $[BC]$ donc $M\left(m = \frac{b+c}{2}\right)$

. N est le milieu de $[DE]$ donc $N\left(n = \frac{d+e}{2}\right)$

. P est le milieu de $[AF]$ donc $P\left(p = \frac{a+f}{2}\right)$

. OAB est équilatéral direct

$\Leftrightarrow R(O(0) ; \frac{\pi}{3}) : A \to B$

$\Leftrightarrow b - 0 = e^{i\pi/3}(a - 0)$

$\Leftrightarrow b = e^{i\pi/3}a$

. OCD est équilatéral direct

$\Leftrightarrow R\left(O(0) ; \frac{\pi}{3}\right) : C \to D$

$\Leftrightarrow (d - 0) = e^{i\pi/3}(c - 0)$

$\Leftrightarrow d = e^{i\pi/3} c$

. OEF est équilatéral direct

$\Leftrightarrow R\left(O(0) ; \frac{\pi}{3}\right) : E \to F$

$\Leftrightarrow f - 0 = e^{i\pi/3}(e - 0)$

$\Leftrightarrow f = e^{i\pi/3} e$

* $e^{i\pi/3}(n - m) = e^{i\pi/3}\left(\frac{d+e}{2} - \frac{b+c}{2}\right)$

$= \frac{e^{i\pi/3} d + e^{i\pi/3} e - e^{i\pi/3} b - e^{i\pi/3} c}{2}$

$= \frac{e^{i\pi/3} d + f - e^{i\pi/3} b - d}{2}$

* $p - m - \left(e^{i\pi/3}(n - m)\right)$

$= \frac{a+f}{2} - \frac{b+c}{2} - \frac{e^{i\pi/3} d + f - e^{i\pi/3} b - d}{2}$

$= \frac{a + f - b - c - e^{i\pi/3} d - f + e^{i\pi/3} b + d}{2}$

$= \frac{a - b - c - e^{i\pi/3} d + e^{i\pi/3} b + d}{2}$

$= \frac{a - e^{i\pi/3} a - c - e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/3} c + e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/3} a + e^{i\pi/3} c}{2}$

$= \frac{a\left(1 - e^{i\pi/3} + (e^{i\pi/3})^2\right) + c\left(-1 - (e^{i\pi/3})^2 + e^{i\pi/3}\right)}{2}$

* $1 - e^{i\pi/3} + (e^{i\pi/3})^2 = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$= 1 - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$= 1 - 1$

$= 0$

• $-1-(e^{i\pi/3})^2+e^{i\pi/3} = -(1-e^{i\pi/3}+(e^{i\pi/3})^2)=0$

donc $\dfrac{a(-e^{i\pi/3}+1+(e^{i\pi/3})^2)+c(-1-(e^{i\pi/3})^2+e^{i\pi/3})}{2}=0$

donc $p-m-(e^{i\pi/3}(n-m))=0$

$$p-m = e^{i\pi/3}(n-m)$$

$$\Leftrightarrow R\left(M(m);\frac{\pi}{3}\right): N \to P$$

donc le triangle MNP est équilatéral direct.