Exo : 1) les différents restes possibles de la division euclidienne de p par 3 sont 0 ; 1 et 2 donc $p \equiv 0(3)$ ou $p \equiv 1(3)$ ou $p \equiv 2(3)$

$p \equiv 0(3)$: $p = 3k$
- si $k=1$ $p=3$ or $p \geq 7$ donc impossible.
- si $k>1$: p n'est plus premier. donc impossible

Donc $p \equiv 1(3)$ ou $p \equiv 2(3)$ or $2 \equiv -1(3)$ donc $\boxed{p \equiv 1(3) \text{ ou } p \equiv -1(3)}$

* $p \equiv 1(3)$: $p^4 \equiv 1^4\ (3)$ donc $p^4 - 1 \equiv 0(3)$ donc $n \equiv 0(3)$ donc n est divisible par 3

de même si $p \equiv -1(3)$

2) • le seul nombre premier pair est 2 or p est premier et ≥ 7 donc p est impair donc $p = 2k+1$. donc $p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = \underline{4k(k+1)}$

• $n = p^4 - 1 = (p^2)^2 - 1 = (p^2-1)(p^2+1) = 4k(k+1)\ (p^2+1)$

$= 4k(k+1)\left[(2k+1)^2+1\right] = 4k(k+1)\left[4k^2+4k+2\right]$

$= 4 \times 2 \times [2k^2+2k+1]\ \ \underline{k(k+1)}$

produit de 2 entiers consécutifs donc l'un des facteurs est pair donc le produit de facteurs est pair.

$= 8\ [2k^2+2k+1) \times 2K$

$= 16K[2k^2+2k+1]$ donc $\underline{16 \text{ divise } n}$

3) Disjonction de cas (les restes possibles de la division euclidienne de p par 5 sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4)

$p \equiv 0(5)$: $p = 5k$
- $k=1$: $p=5$ or $p \geq 7$ donc impossible
- $k>1$: p n'est plus premier donc impossible

Il est donc impossible que $p \equiv 0(5)$

$p \equiv 1(5)$: $p^4 \equiv 1^4(5)$ donc $p^4 - 1 \equiv 0\ (5)$ donc p^4-1 est divisible par 5 donc n est divisible par 5

de même si $p \equiv 2(5)$; $p \equiv 3(5)$ et $p \equiv 4(5)$

4) (a) $\boxed{\text{Si } a \mid b \text{ et } c \mid b \text{ avec } a \text{ et } c \text{ premiers entre eux alors } ac \mid b. \text{ (ceci est le corollaire de gauss)}}$

(b) D'après (1) et (2) : n est divisible par 3 et 16 or 3 et 16 sont premiers entre eux donc $3 \times 16 = 48$ divise n or 5 divise n et 48 et 5 sont premiers entre eux donc $48 \times 5 = \underline{240}$ divise n.

5) Absurde : Supposons qu'il existe quinze nombres premiers $p_1, \dots p_{15} \geq 7$ tel que $A = p_1^4 + \dots + p_{15}^4$ soit premier. or $p^4 \equiv 1(240)$ d'après 4)(b) lorsque p est premier ≥ 7 donc $A \equiv 15(240)$ donc $A - 15 = 240k$.

donc $A = 15 + 240k = 15(1+16k)$ donc 15 divise A or $A > 15$ donc A n'est pas premier, d'où une contradiction.