TS SPE CORRIGE

DEVOIR MAISON : *THEME : LES CLES DE CONTROLE*

I. La clé des codes barres

Le code *U.P.C. (Universal Product Code)* utilise des nombres de treize chiffres pour désigner un produit de consommation. Les douze premiers chiffres désignent le produit, le treizième est une clé de contrôle destinée à détecter une erreur dans l'un des douze premiers. La clé est calculée de telle sorte que, si le nombre s'écrit $a_1 \dots a_{13}$, alors :

$$3 \times \left(\sum_{i=1}^{6} a_{2i} \right) + \left(\sum_{i=0}^{6} a_{2i+1} \right) \equiv 0 \pmod{10}$$

1) Vérifier la règle précédente pour vos deux livres de mathématiques.
2) Calculer la clé associée au nombre de douze chiffres 3 250 390 176 81.
3) Montrer que, si un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée.

II. La clé du numéro I.N.S.E.E.

Le code I.N.S.E.E. est formé d'un nombre A de treize chiffres, porteur de certaines informations sur l'état civil (sexe, date et lieu de naissance...) suivi d'un nombre de deux chiffres K, qui est une clé de détection d'erreur dans l'un des chiffres de A.

La condition $A + K \equiv 0$ (modulo 97) permet le calcul de K.

1) Vérifier votre propre clé INSEE (ou celle de vos parents).
2) Calculer la clé associée au numéro A = 1 56 12 67 482 376.
3) Décrire un procédé de calcul pratique de la clé à l'aide d'une (petite) calculatrice.
   Piste : Poser $A = 10^6 B + C$ avec $0 \leq C < 10^6$ et en remarquant que $10^2 \equiv 3$ (modulo 97) prouver que dans la vérification en 1) on peut remplacer A par 27B + C.
4) Montrer que, si un seul des chiffres de A est erroné, l'erreur est détectée.
5) Trouver une modification de deux chiffres de A qui laisse la clé de contrôle inchangée.

III. La clé du R.I.B.

Le R.I.B. (relevé d'identité bancaire) comporte de gauche à droite 5 chiffres pour le code de la banque, 5 chiffres pour le code du guichet, 11 chiffres pour le numéro du compte, 2 chiffres pour la clé K, ainsi calculée : si A est le nombre à 21 chiffres, et si r est le reste de la division euclidienne de 100 A par 97, alors K = 97 – r.

1) Vérifier votre propre clé R.I.B. (ou celle de vos parents).
2) Calculer la clé pour le relevé : 13009 00034 04312721543 **.
3) Décrire un procédé de calcul pratique de la clé à l'aide d'une (petite) calculatrice.
   Piste : Poser $100\,A = B \times (10^7)^2 + C \times 10^8 + D \times 10^2$ *avec* $0 \le C < 10^6$ *et* $0 \le D < 10^6$
4) Montrer que, si dans le nombre complet à 23 chiffres, un et un seul des chiffres est erroné, l'erreur est détectée, et qu'il en est de même si deux chiffres consécutifs sont permutés.

IV. Les numéros de cartes bancaires

Un numéro de carte bancaire est de la forme $a_n a_{n-1}\ldots\ldots a_1 a_0$ où les a_i sont des entiers compris entre 0 et 9. Sur ces chiffres, on définit l'application f :

$f(x) = 2x$ si $0 \le 2x \le 9$ et

$f(x) = x_1 + x_2$ si $2x = 10x_1 + x_2$ avec bien sûr $0 \le x_i \le 9$

On impose alors à un numéro de carte bancaire de vérifier la règle de Luhn :

$a_0 + f(a_1) + a_2 + f(a_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots \equiv 0 \pmod{10}$.

1) Fabriquer un numéro de carte bancaire à 16 chiffres « valide ».
2) Montrer que si un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée.

V. Les clés des numéros I.S.B.N.

L'International Standard Book Number (**I.S.B.N.**) permet de coder tous les ouvrages édités dans le monde entier. Il utilise des mots de longueur 10 écrits à l'aide des chiffres 0, 1, .. 9 et du symbole X qui représente le nombre 10 (qui ne peut être utilisé, au besoin, que pour la clé). Le premier chiffre désigne le pays, un autre bloc de chiffres désigne l'éditeur, le bloc suivant est le numéro donné par l'éditeur, le dernier symbole est la clé K, ainsi calculée :

si $a_1 a_2\ldots\ldots a_9 a_{10}$ est le numéro I.S.B.N. complet, le nombre $\sum_{i=1}^{10} i\, a_{11-i}$ doit être divisible par 11.

1) Vérifier la règle précédente pour vos deux livres de mathématiques.
2) Calculer la clé des numéros suivants 3 371 08452* et 0 168 52059*.
3) Montrer que, si un et un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée.
4) Montrer que, si deux chiffres consécutifs sont permutés, l'erreur est détectée.
5) Trouver toutes les valeurs de a et b telles quel 2 842 250ab1 soit un code I.S.B.N. valide.

Remarque « pour votre culture » : U.P.C., I.N.S.E.E., R.I.B .et I.S.B.N. sont des ***ACRONYMES***
PETIT ROBERT : acronyme n. m. • 1970; angl. *acronym* « mot formé d'initiales ou de syllabes de plusieurs mots », de *acro-* et *-onym* « nom », d'apr. *homonym*
♦ Ling. Sigle* prononcé comme un mot ordinaire. *« Ovni » et « sida » sont des acronymes.*
Que signifie, I.N.S.E.E ? Cherchez d'autres acronymes !

TS SPE CORRIGE

I. La clé des codes barres

1. Livre de spécialité :

Code barre : 9 782091 724 607

$a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots\cdots a_{13}$

$$\left.\begin{array}{l} 3\times(7+2+9+7+4+0) = 87 \\ 9+8+0+1+2+6+7 = 33 \end{array}\right\} \text{SOMME} = 120 \equiv 0\,(10)$$

Livre de la partie obligatoire :

Code barre : 9 782047 295 977

$a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots\cdots a_{13}$

$$\left.\begin{array}{l} 3\times(7+2+4+2+5+7) = 81 \\ 9+8+0+7+9+9+7 = 49 \end{array}\right\} \text{SOMME} = 130 \equiv 0\,(10)$$

2. Code barre : 3 250 390 17681K

$$3\times(2+0+9+1+6+1) + (3+5+3+0+7+8+K) \equiv 0\,(10)$$

$$\Leftrightarrow 3\times 19 + 26 + K \equiv 0\,(10)$$

$$\Leftrightarrow 3 + K \equiv 0\,(10)$$

donc $K = 7$ car $0 \leq K \leq 9$

3. Raisonnons par disjonction de cas :

a) si le chiffre a_{2k} est remplacé par un chiffre b_{2k} (k entier variant de 1 à 6), pour que l'erreur ne soit pas détectée il faut que $3(a_{2k}-b_{2k})$ soit un multiple de 10. Comme 10 est premier avec 3 cela implique que 10 divise $a_{2k}-b_{2k}$ (Th. de Gauss) donc $a_{2k}-b_{2k}=0$ ce qui

b) Pour un chiffre a_{2k+1} (k entier variant de 1 à 6) même raisonnement mais en plus simple : on a immédiatement $a_{2k+1}-b_{2k+1}=0$

TS SPE CORRIGE

II. La clé du numéro I.N.S.E.E.

2) Clé du numéro INSEE : 1 56 12 67 482 376

On a : $156\,12\,67\,482\,376 = 97 \times 16\,095\,541\,055 + 41$

La clé est donc K telle que : $41 + K \equiv 0\ (97)$ et $0 \leq K < 97$

donc $K = 56$

3) $10^2 = 100 \equiv 3\ (97)$

donc $(10^2)^3 = 10^6 \equiv 27\ (97)$

Donc si $A = 10^6 B + C$

alors $A \equiv 27B + C\ (97)$

4) Soit A le nombre à 13 chiffres original et A'

le nombre à 13 chiffres erroné avec un seul chiffre différent

Un chiffre a_k (k entier variant de 1 à 13) a été remplacé par

un chiffre b_k différent. L'erreur n'est pas détectée si

et seulement si : $A \equiv A'\ (97)$

Si on note : $A = a_1 \times 10^{12} + a_2 \times 10^{11} + \cdots + a_{12} \times 10 + a_{13}$

on a : $A \equiv A'\ (97) \Leftrightarrow a_k\, 10^{13-k} \equiv b_k \times 10^{13-k}\ (97)$

pour un entier k et un seul entre 1 et 13

$\Leftrightarrow (a_k - b_k) \times 10^{13-k} \equiv 0\ (97)$ pour un entier k et

un seul entre 1 et 13.

Comme 10^{13-k} est premier avec 97 pour tout entier k compris

entre 1 et 13 on a (Th. de Gauss) : $a_k - b_k \equiv 0\ (97)$

donc $a_k = b_k$ ce qui était exclu au départ.

(car a_k et b_k sont compris entre 0 et 9)

5) Beaucoup de possibilités bien sûr !

Il faut ajouter à A un multiple de 97, par exemple :

1 56 12 67 482 473 (2 chiffres seulement différents)

III. La clé du R.I.B.

2) $13009\ 00034\ 04312\ 721\ 543 = A$

Le reste de la division euclidienne de $100A$ par 97 est égal à 83 et donc la clé K vaut 14.

3) $100A$ a 23 chiffres

$100A = B \times 10^{14} + C \times 10^{8} + D \times 10^{2}$

avec $0 \leq C < 10^6$ et $0 \leq D < 10^6$.

C et D correspondent aux deux premiers blocs de 6 chiffres en partant de la droite du nombre A.

On a : $10^7 \equiv 76\ (97)$ donc $(10^7)^2 \equiv 76^2 \equiv 53\ (97)$

$10^8 \equiv 81\ (97)$ et $10^2 \equiv 3\ (97)$

Donc : $100A \equiv 53B + 81C + 3D\ \ (97)$

Application au cas vu en 2) : $3D \equiv 74\ \ (97)$

$81C \equiv 35\ \ (97)$

$53B \equiv 71\ \ (97)$

4) Si un et un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée (même preuve que celle du numéro INSEE)

Si deux chiffres a_k et a_{k+1} sont permutés (k entier variant de 1 à 20) alors $a_k \times 10^{21-k} + a_{k+1} \times 10^{21-k-1}$ est remplacé par

$a_k \times 10^{21-k-1} + a_{k+1} \times 10^{21-k}$

L'erreur n'est pas détectée si et seulement si ces deux sommes sont congrues modulo 97 ce qui équivaut à :

$10^{21-k-1} \times (10a_k + a_{k+1} - a_k - 10a_{k+1}) \equiv 0\ (97)$

$\Leftrightarrow 10^{21-k-1} \times (9a_k - 9a_{k+1}) \equiv 0\ \ (97)$

$\Leftrightarrow 10^{21-k-1} \times 9 \times (a_k - a_{k+1}) \equiv 0\ \ (97)$

Comme les puissances de 10 et le nombre 9 sont premiers avec 97 on en déduit (Th. de Gauss) que $a_k - a_{k+1}$ est un multiple de 97 et donc comme ils sont compris entre 0 et 9 on a : $a_k = a_{k+1}$

TS SPE CORRIGE

IV. Les numéros de cartes bancaires

1) Exemple : 4 173 2868 1416 4909

Vérifions : $9 + 0 + 9 + 8 + 6 + 2 + 4 + 2 + 8 + 3 + 8 + 4$
$+ 3 + 5 + 1 + 8 = 80 \equiv 0 \ (10)$

2) Il est évident que toute erreur sur un chiffre a_{2k}, où k est un entier variant entre 0 et 8, est immédiatement détectée.

Si un chiffre a_{2k+1} (k entier variant de 0 à 7) est remplacé par un chiffre b_{2k+1}, pour que l'erreur ne soit pas détectée il faudrait que $f(a_{2k+1}) \equiv f(b_{2k+1}) \pmod{10}$

Or f est une bijection de $\{0 ; 1 ; 2, 3 ; 4, 5 ; 6, 7 ; 8, 9\}$ vers lui-même ce qui est aisé à vérifier :

$f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 6$; $f(4) = 8$

$f(5) = 1$; $f(6) = 3$; $f(7) = 5$; $f(8) = 7$; $f(9) = 9$

Donc $f(a_{2k+1}) - f(b_{2k+1}) \equiv 0 \ (10)$

implique $f(a_{2k+1}) = f(b_{2k+1})$ (ce sont des chiffres entre 0 et 9)

implique $a_{2k+1} = b_{2k+1}$ car f est une bijection.

Donc a_{2k+1} ne peut pas être remplacé par un chiffre différent.

BONUS : Cas d'une permutation de 2 chiffres consécutifs.

Si a_{2k-1} et a_{2k} sont permutés, pour que l'erreur ne soit pas détectée il faudrait que : $a_{2k-1} + f(a_{2k}) \equiv a_{2k} + f(a_{2k-1}) \pmod{10}$

$\iff f(a_{2k}) - a_{2k} \equiv f(a_{2k-1}) - a_{2k-1} \pmod{10}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x) - x \pmod{10}$	0	1	2	3	4	6	7	8	9	0

Ce qui montre que la permutation n'est pas détectée seulement dans le cas où les chiffres permutés sont 0 et 9. Ce qui se produit une fois sur 50.

V. Les clés des numéros I.S.B.N.

1) Livre de spécialité : ISBN 2 09 172 460 2

$$\sum_{i=1}^{10} i\, a_{11-i} = 1\times 2 + 2\times 0 + 3\times 6 + 4\times 4 + 5\times 2 + 6\times 7 + 7\times 1 + 8\times 9 + 9\times 0 + 10\times 2$$

$$= 187 = 11\times 17$$

Livre partie obligatoire : ISBN : 2 04 729597 1

$$\sum_{i=1}^{10} i\, a_{11-i} = 1\times 1 + 2\times 7 + 3\times 9 + 4\times 5 + 5\times 9 + 6\times 2 + 7\times 7 + 8\times 4 + 9\times 0 + 10\times 2$$

$$= 220 = 20\times 11$$

2) Pour le premier si on note K la clé, la condition s'écrit :

$$1\times K + 2\times 2 + 3\times 5 + 4\times 4 + 5\times 8 + 6\times 0 + 7\times 1 + 8\times 7 + 9\times 3 + 10\times 3 \equiv 0\ (11)$$

d'où $195 + K \equiv 0\ (11)$ d'où $K = 3$

Pour l'autre on trouve $K = 1$.

3) Si le chiffre a_k (k est un entier compris entre 1 et 10) est remplacé par le chiffre b_k on a : $k\times(b_k - a_k) \equiv 0\ (11)$

Comme k ne divise pas 11 on a $b_k - a_k \equiv 0\ (11)$ donc forcément $b_k = a_k$.

4) Si les deux chiffres a_k et a_{k+1} sont permutés (k entier variant de 1 à 9) on a alors : $(11-k)a_k + (10-k)a_{k+1}$ remplacé par $(11-k)a_{k+1} + (10-k)a_k$. L'erreur ne sera pas détectée si et seulement si : $a_k - a_{k+1} \equiv 0\ (11)$ c'est-à-dire $a_k = a_{k+1}$

5) La condition est alors équivalente à : $3a + 2k \equiv 0\ (11)$

Les solutions sont les couples : $(1,4)$ $(2,8)$ $(3,1)$ $(4,5)$ $(5,9)$ $(6,2)$ $(7,6)$ $(9,3)$ et $(0,0)$.