DEVOIR MAISON.

Les triplets pythagoriciens.

On cherche les triplets d'entiers naturels non nuls $(x ; y ; z)$ tels que ; $x^2 + y^2 = z^2$.
Soit E l'ensemble de ces triplets. On les nomme triplets « pythagoriciens ».

1. Montrer que pour tout couple (a,b) d'entiers naturels non nuls tels que $a > b$, le triplet $(a^2 - b^2 ; 2ab ; a^2 + b^2)$ appartient à E.

2. Prouver que si $(x ; y ; z)$ est un triplet pythagoricien alors $(cx ; cy ; cz)$ (où c est un entier naturel non nul) est aussi un triplet pythagoricien.

3. Soit $(x ; y ; z) \in E$ tel que PGCD $(x ; y) = 1$.
   a) Montrer qu'alors PGCD $(x ; z) = 1$ et PGCD $(z ; y) = 1$.
   b) Montrer que x et y n'ont pas la même parité.
   c) Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q premiers entre eux tels que : $x = p - q$, $z = p + q$, et $y^2 = 4pq$.
   d) Montrer que p et q sont des carrés parfaits.

4. En déduire l'ensemble E. Donner tous les triplets de E avec $z \leq 18$.

5. Prolonger ce devoir en cherchant des infos sur le « grand théorème de Fermat » finalement démontré par le mathématicien anglais Andrew Wiles après 350 années d'efforts et de recherche des mathématiciens du monde entier.

1) Soit a et b deux entiers tels que $0 < b < a$. Si on pose : $x = a^2 - b^2$; $y = 2ab$; $z = a^2 + b^2$
x, y et z sont bien des entiers strictement positifs et $x^2 + y^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2+ b^2)^2 = z^2$ et donc le triplet (x, y, z) appartient à E.
Par exemple, si $a = 4$ et $b = 3$ on obtient $x = 7$; $y = 24$ et $z = 25$
Remarques :
1°) Si (x ; y ; z) est un triplet pythagoricien alors (cx ; cy ;cz) (où c est un entier naturel non nul) est aussi un triplet pythagoricien. car $(cx)^2 + (cy)^2 = c^2 (x^2 + y^2) = c^2z^2 = (cz)^2$
2°) Si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des triplets de la forme $(c(a^2 - b^2); c \times 2ab ; c(a^2 + b^2))$ ou $(c \times 2ab ; c(a^2 - b^2) ; c(a^2 + b^2))$ avec a , b et c entiers naturels non nuls, $a > b$ on a donc prouvé que $\mathscr{S} \subset E$.
La suite de l'exercice vise à établir l'inclusion inverse $E \subset \mathscr{S}$.

2) D'après la première remarque ci-dessus, il suffit de s'intéresser aux solutions pour lesquelles x et y sont premiers entre eux.
a) Soit d = PGCD(x ; z), d divise x et z donc d^2 divise x^2 et z^2, donc d^2 divise y^2 ; or x^2 et y^2 sont premiers entre eux, donc $d^2 = 1$, d'où $d = 1$. x et z sont donc premiers entre eux. Il en est de même de y et z.
b) x et y étant premiers entre eux, ils ne sont pas tous les deux pairs.
Supposons qu'ils soient tous deux impairs (raisonnement par l'absurde)
alors x^2 et y^2 seraient tous deux impairs et donc z^2 serait pair et z serait pair
alors z^2 serait congru à 0 modulo 4 et donc $x^2 + y^2$ serait congru à 0 modulo 4 ce qui est impossible car si $x = (2k + 1)$ et $y = (2n + 1)$ alors $x^2 + y^2 \equiv 2 \ (4)$ et on aboutit à une contradiction : x et y ne sont pas tous deux impairs et donc x et y n'ont pas la même parité.
c) En supposant x impair et y pair, z est impair. $z + x$ et $z - x$ sont donc pairs. Il existe deux entiers strictement positifs p et q tels que : $z + x = 2p$ et $z - x = 2q$
On en déduit $x = p - q$, $z = p + q$ et $y^2 = (p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq$
Comme x et z sont premiers entre eux, il en est de même de p et q.
Comme $y^2 = 4pq$, pq est un carré et donc dans sa décomposition en facteurs premiers, chaque facteur doit apparaître avec un exposant pair. Comme p et q sont premiers entre eux, leurs facteurs premiers sont différents. Chaque facteur premier doit donc apparaître avec un exposant pair dans la décomposition de p ou bien dans celle de q : p et q sont des carrés d'entiers.
En posant $p = a^2$ et $q = b^2$, on a donc : $x = a^2 - b^2$; $y = 2ab$; $z = a^2 + b^2$

3) Une solution quelconque est obtenue à partir de la précédente en multipliant éventuellement x, y et z par un même facteur c entier non nul et en échangeant éventuellement x et y. On a donc prouvé l'inclusion réciproque $E \subset \mathscr{S}$ et l'ensemble E est l'ensemble des triplets de la forme :
$(c(a^2 - b^2), 2abc , c(a^2 + b^2))$ ou $(2abc , c(a^2 - b^2) , c(a^2 +b^2))$ où a, b et c sont des entiers strictement positifs tels que $a > b$.
On obtient toutes les solutions telles que $z \leq 18$ en faisant $a = 2$ et $b = 1$ ou $a = 3$ et $b = 2$ ou $a= 3$ et $b = 1$ ou $a = 4$ et $b = 1$ car il faut avoir $a^2 + b^2 \leq 18$
(3,4,5); (8,6,10); (15,8,17); (5,12,13), en multipliant le premier exemple par le facteur 2 ou le facteur 3 (6, 8, 10) ; (9,12,15), et en échangeant x et y, si le triplet correspondant n'a pas déjà été obtenu :
(4,3,5); (8,15,17); (12,5,13); (12,9,15). Il y a donc exactement dix solutions.

COMPLEMENT : Pour n supérieur à 2, il n'existe aucun triplet d'entiers naturels non nuls (x ; y ; z) tels que : $x^n + y^n = z^n$. Ce résultat constitue le TRES célèbre « grand théorème de FERMAT ». Ce résultat extrêmement difficile à établir a finalement été prouvé en juin 1993 par le mathématicien anglais Andrew Wiles après 350 années d'efforts et de recherche des mathématiciens du monde entier.

http://serge.mehl.free.fr/chrono/wiles.html
http://didierroth.free.fr/