EXERCICE 1 **Partie A**

Partie A

1) Remarquons que $f(x) = 40\,\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} + 10\,e^{-\frac{x}{2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$. Par suite son inverse, $\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$, a pour limite 0 en $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 40\,\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$. Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} 10\,e^{-\frac{x}{2}} = 0$.

On en déduit, par somme, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) $f'(x) = 20e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}(20x+10)e^{-\frac{x}{2}}$.

Soit après factorisation de $e^{-\frac{x}{2}}$ et réduction, $f'(x) = 5(-2x+3)e^{-\frac{x}{2}}$.

Comme $5e^{-\frac{x}{2}} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est alors celui de $-2x+3$.

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{3}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Il en résulte que la fonction f est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{3}{2}\right[$ et décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Le maximum de f est $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 40e^{-\frac{3}{4}} \approx 18.89$.

Le tableau de variation de f en résulte :

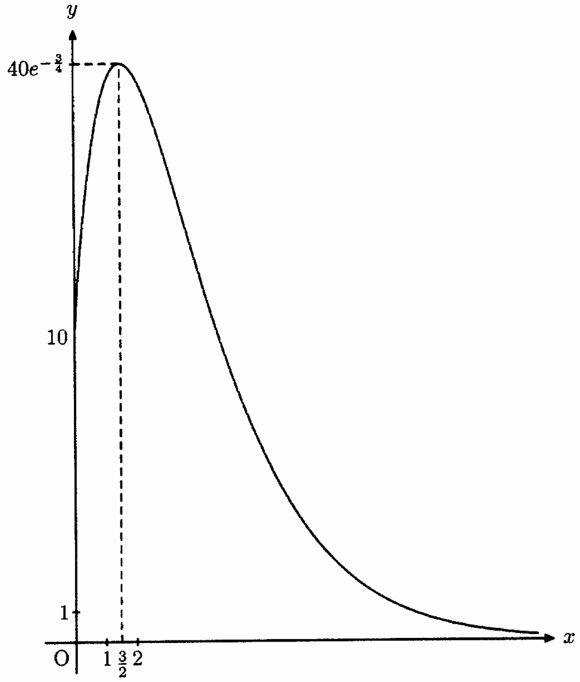
x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	$\nearrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	0

3) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{3}{2}\right[$ et $f(0) = 10$. Donc $f(x) > 10$ sur cet intervalle et l'équation $f(x) = 10$ n'a donc pas de solution sur cet intervalle.

La fonction f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$, à valeurs dans l'intervalle $\left]0\,;f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$ et $0 < 10 < f\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Donc l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Cette solution α est de façon évidente strictement positive.

Une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α est $4,673$.

4) Courbe $\mathcal{C}$ (échelle $\dfrac{1}{2}$) :



5) Intégrons par parties en posant :
$u(x) = 20x + 10$ et $v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}$. Les deux fonctions u et v sont toutes les deux dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ et de dérivées $u'(x) = 20$ et $v'(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ continues sur cet intervalle.
La formule d'intégration par parties s'applique donc et :

$$I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \left[-2(20x+10)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3 + 40\int_0^3 e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x.$$

Comme $\int_0^3 e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = -2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3$, il en résulte que $I = \left[-2(20x+10)e^{-\frac{x}{2}} - 80e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3$.
Soit $I = \left[-(40x+100)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3 = -20\left[(2x+5)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3 = 20(5 - 11e^{-\frac{3}{2}})$.

Partie B

1) D'après le résultat obtenu en **A 2)**, $f'(t) = -(10t - 15)e^{-\frac{t}{2}}$.
On en déduit que $f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = (-10t + 15 + 10t + 5)e^{-\frac{t}{2}} = 20e^{-\frac{t}{2}}$. La fonction f est bien solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2) **a)** Par hypothèse $g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20e^{-\frac{t}{2}}$ et de même pour f. Par différence membre à membre $g'(t) - f'(t) + \frac{1}{2}(g(t) - f(t)) = 0$ donc $g - f$ est bien solution sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ de (E').

b) Les solutions de (E') sont celles de $y' = -\frac{1}{2}y$. Par suite les solutions de (E') sont les fonctions h définies sur $[0\ ;+\infty[$ par $h(t) = Ce^{-\frac{t}{2}}$ où C est une constante réelle arbitraire.

c) Il résulte de ce qui précède que pour tout t de $[0\ ;+\infty[$, $g(t) - f(t) = Ce^{-\frac{t}{2}}$.
Par hypothèse $g(0) = 10$ et $f(0) = 10$. Donc $g(0) - f(0) = C$. Soit $C = 0$.
La fonction f apparaît donc comme la seule solution de l'équation différentielle (E) sur $[0\ ;+\infty[$.

3) La valeur initiale de la température de la réaction chimique est de 10. On a établi à la question **A 3)** que la fonction f atteignait à nouveau cette valeur de 10 pour la valeur α de la variable, soit au bout de 4,673 heures c'est à dire au bout de 4 heures et 40 minutes environ.

4) La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ est $\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t$. Donc d'après le résultat établi en **A5)**, $\theta = \frac{20}{3}\left(5 - 11e^{-\frac{3}{2}}\right)^\circ$C.
$\frac{20}{3}\left(5 - 11e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx 16,97$ donc $\theta \approx 17^\circ$C.

EXERCICE 2

1. $p_{I_n}(I_{n+1}) = 0{,}04$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) = 0{,}64$ d'après l'énoncé et ce pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. De même, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$p(I_{n+1} \cap I_n) = p(I_n) \times p_{I_n}(I_{n+1}) = 0{,}04\, p_n$$
$$p(I_{n+1} \cap \overline{I_n}) = p(\overline{I_n}) \times p_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) = 0{,}64\,(1 - p_n)$$

2. $p_{n+1} = p(I_{n+1})$

donc comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(I_{n+1}) = p(I_{n+1} \cap I_n) + p(I_{n+1} \cap \overline{I_n})$

(formule des probabilités totales)

on en déduit pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$:

$$p_{n+1} = 0{,}04\, p_n + 0{,}64\,(1 - p_n) = -0{,}6\, p_n + 0{,}64.$$

(CQFD)

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = p_n - 0{,}4$ donc :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = -0{,}6\, p_n + 0{,}24$

$$= -0{,}6\,(p_n - 0{,}4) = -0{,}6\, q_n$$

Conclusion : La suite (q_n) est géométrique de raison $-0{,}6$

b. D'après le cours on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = q_1 \times (-0{,}6)^{n-1}$

Or $q_1 = p_1 - 0{,}4 = 0{,}35$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = 0{,}35 \times (-0{,}6)^{n-1}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 0{,}4 + 0{,}35 \times (-0{,}6)^{n-1}$

La suite (q_n) est géométrique de raison $-0{,}6$ et $-1 < -0{,}6 < 1$ on sait alors d'après le cours que la suite (q_n) converge vers 0.

On en déduit que la suite (p_n) est également convergente et que sa limite est $0{,}4$. (Th. généraux)

EXERCICE 3 **(Obligatoire)**

Pour $z \neq 0$ on a $z' = \dfrac{4}{\bar{z}}$ et $M(z)$ est changé par f en M' d'affixe z'.

1. $M(z)$ est invariant par $f \iff z' = z \iff z\bar{z} = 4$
$\iff |z|^2 = 4 \iff |z| = 2 \iff M(z)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

2. $M(z)$ a pour image par f le point J d'affixe 1
$\iff z' = 1 \iff \bar{z} = 4 \iff z = 4 \iff M$ est le point d'affixe 4.

3. Soit $a \neq 0$ un complexe quelconque non nul.
$A(a)$ admet $M(z)$ pour antécédent par f $(z \neq 0)$
$\iff z' = a \iff \dfrac{4}{\bar{z}} = a \iff \bar{z} = \dfrac{4}{a} \iff z = \dfrac{4}{\bar{a}}$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de $M(z)$, z étant déterminé par l'égalité $z = \dfrac{4}{\bar{a}}$

<u>Remarque</u> : $M(z)$ a pour image par f. On a à la fois $f(M) = A$ et $f(A) = M$.

4.a. On a : $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg\left(\dfrac{4}{z\bar{z}}\right) \quad (2\pi)$

$$= \arg\left(\frac{4}{|z|^2}\right) = 0 \quad (2\pi)$$

On en déduit que M' est sur la demi-droite d'origine O passant par M.

b. $|z'| = \left|\dfrac{4}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|4|}{|\bar{z}|} = \dfrac{4}{|z|}$ pour tout z non nul

Si $M(z)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r alors

$|z| = r$ et donc $|z'| = \frac{4}{r}$ et donc $M'(z')$ est sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{4}{r}$ avec $M' = f(M)$.

Réciproquement un point $M'(z')$ situé sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{4}{r}$ est a pour antécédent par f un point du cercle de centre O et de rayon r.

Conclusion : L'image par f du cercle de centre O et de rayon $r > 0$ est le cercle de centre O et de rayon $\frac{4}{r}$.

c. On sait que : 1°) P' est sur la demi-droite d'origine O passant par P d'après a.

2°) P' est sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{4}{3}$ d'après b.

Donc P' est l'unique point d'intersection de ces deux figures géométriques.

5. Soit $M(z)$ un point de $\mathcal{C}_1$ distinct de O.
Soit B le point d'affixe 2 qui est sur $\mathcal{C}_1$.

1er cas : $M = B$ donc $z = 2$ et $z' = \frac{4}{2} = 2$ donc $M' = B$ et $M' = B$ appartient bien à $\mathcal{D}$.

2e cas : $M \neq B$. On a alors : $M_{(z)} \in \mathcal{C}_1 \iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

$\iff \arg\left(\frac{0 - z}{2 - z}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \iff \frac{z}{z-2}$ est un imaginaire pur non nul

$\iff \overline{\left(\frac{z}{z-2}\right)}$ est un imaginaire pur non nul $\iff \frac{\bar{z}}{\bar{z} - 2}$ est un imaginaire pur non nul $\iff \frac{2}{2 - \frac{4}{\bar{z}}}$ est un imaginaire pur non nul

$\iff \frac{2}{2 - z'}$ est un imaginaire pur non nul $\iff \overrightarrow{M'B} \perp \overrightarrow{OB}$

$\iff M'$ est sur la droite $\mathcal{D}$ (CQFD)

<u>EXERCICE 4</u> **1ère partie :**

1. $t \geq 0$ est nécessaire pour l'existence de $\sqrt{t}$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$, on a : $f(t)$ existe $\Leftrightarrow 3-\sqrt{t} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} < 3 \Leftrightarrow t < 9$

Donc f est définie sur $[0;9[$.

La fonction f est la composée de la fonction $f_1 : t \longmapsto 3-\sqrt{t}$ avec la fonction ln qui sont toutes deux continues sur leur ensemble de définition. Donc f est continue sur $[0;9[$.

2. La fonction $f_1 : t \longmapsto 3-\sqrt{t}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ (composée de $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \longmapsto 3-t$)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$f = \ln \circ f_1$ est donc strictement décroissante sur $[0;9[$.

3. $\lim\limits_{x \to 9} (3-\sqrt{t}) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc en utilisant le théorème de limite d'une fonction composée on a : $\lim\limits_{t \to 9} f(t) = -\infty$

On en déduit l'existence pour la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une asymptote verticale d'équation $x = 9$.

4. $\forall t \in [0;9[$ on a : $f(t) \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln(3-\sqrt{t}) \geq \ln(1)$

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{t} \geq 1$ (car ln $\nearrow$)

$\Leftrightarrow \sqrt{t} \leq 2$

$\Leftrightarrow t \leq 4$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres de l'intervalle $[0;4]$

2e partie :

1. a. L'aire hachurée est égale à $A(x_0+h) - A(x_0)$
Cette aire peut être encadrée par l'aire de deux rectangles de même largeur h.
L'un a pour largeur $f(x_0)$ soit $\ln(3-\sqrt{x_0})$ et son aire est donc : $h \times \ln(3-\sqrt{x_0})$
L'autre a pour largeur $f(x_0+h)$ soit $\ln(3-\sqrt{x_0+h})$ et son aire est donc : $h \times \ln(3-\sqrt{x_0+h})$
D'où compte tenu du fait que $h > 0$ et aussi que f décroît sur $[0;4]$:

$$\ln(3-\sqrt{x_0+h}) \leq \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq \ln(3-\sqrt{x_0}) \quad [1]$$

b. De même si $h<0$ (et x_0+h dans $[0;4]$)

$$-h \times \ln(3-\sqrt{x_0}) \leq A(x_0) - A(x_0+h) \leq -h \times \ln(3-\sqrt{x_0+h})$$

L'aire hachurée étant cette fois égale à $A(x_0) - A(x_0+h)$
d'où après division par $-h > 0$

$$\ln(3-\sqrt{x_0}) \leq \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq \ln(3-\sqrt{x_0+h}) \quad [2]$$

c. On fait maintenant tendre h vers 0 dans les deux doubles inégalités [1] et [2]. On utilise la continuité de la fonction f sur $[0;4]$ ainsi que le théorème de l'encadrement (dit des « gendarmes »)
pour conclure que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}$ existe et vaut $\ln(3-\sqrt{x_0})$
Donc A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = \ln(3-\sqrt{x_0}) = f(x_0)$

2. La fonction A est donc dérivable sur $[0;4]$ et $A' = f$ sur $[0;4]$ donc A est une primitive de f sur $[0;4]$.