SECONDE

Chapitre : Equations et inéquations.

I. Vocabulaire des équations.

1. Egalités et équations.

a) $2 + 5 = 7$ est une égalité VRAIE
$2 + 5 = 8$ est une égalité FAUSSE
$x + 5 = 7$ est une égalité NI VRAIE, NI FAUSSE. C'est une EQUATION. Elle contient un nombre variable x appelé INCONNUE de l'équation.
$x + 5$ est appelé 1er membre ou membre de gauche de l'équation.
7 est appelé 2^{e} membre ou membre de droite de l'équation.

b) Définition : Une équation est une égalité a priori ni vraie ni fausse, comportant au moins un nombre variable appelé(s) INCONNUE(s) de l'équation.

c) Remarque : Une égalité comportant un ou plusieurs nombres variables et toujours vraie est appelée identité.
Exemples : $a + b = b + a$ pour tous les réels a et b
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour tous les réels a et b

2. Définition : RESOUDRE une équation c'est trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue qui rend(ent) l'égalité VRAIE.

3. Exemples d'équations.

$3x + 7 = 2(x - 5)$	équation du 1er degré à 1 inconnue (vue au collège)
$5x^2 + 3x - 7 = 0$	équation du 2^{e} degré à 1 inconnue (vue en 1ère)
$x^3 - 5x^2 + 7x - 11 = 0$	équation du 3^{e} degré à 1 inconnue (vue en POSTBAC)
$2x + 7y - 13 = 0$	équation du 1er degré à 2 inconnues (vue au collège)

4. Le référentiel.

L'équation $x + 2 = 11$ a une solution dans $\mathbb{N}$.
L'équation $x + 12 = 11$ a une solution dans $\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{N}$.
L'équation $3x = 11$ a une solution dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{D}$.
L'équation $x^2 - 2 = 0$ a une solution dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.
L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais en aura dans $\mathbb{C}$ (vu en TS).

RETENEZ : l'ensemble de nombres dans lequel on résout une équation a une grande importance : selon l'ensemble choisi, une même équation peut avoir des solutions ou ne pas en avoir !
L'ensemble des nombres dans lequel on résout une équation est parfois appelé « référentiel de l'équation ».

5. Equations équivalentes.
   Deux équations sont dites équivalentes si elles ont exactement les mêmes solutions.
   Exemple : $4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$

6. Les règles fondamentales.

   Règle 1 : On transforme une équation en une équation EQUIVALENTE en ajoutant (ou retranchant) le même nombre aux deux membres de l'équation.
   Exemple : $4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 \underline{\mathbf{+ 8}} = 0 \underline{\mathbf{+ 8}}$
   Règle 2 : On transforme une équation en une équation EQUIVALENTE en multipliant (ou en divisant) par le même nombre NON NUL les deux membres de l'équation.
   Exemple : $4x = 8 \Leftrightarrow 4x \times \mathbf{\frac{1}{4}} = 8 \times \mathbf{\frac{1}{4}}$

   Contre-exemple : les équations $(2x + 5)(x - 1) = (-3x - 8)(x - 1)$ et $(2x + 5) = (-3x - 8)$ **ne sont pas équivalentes.**
   Simplifier par $(x - 1)$ sans précaution est une infraction à la règle 2, le nombre $(x - 1)$ pouvant être NUL si $x = 1$.

   ATTENTION : l'élévation au carré des deux membres de l'équation ne transforme pas une équation en une équation équivalente !
   Donc les équations $(2x + 5)^2 = (x - 1)^2$ et $(2x + 5) = (x - 1)$ NE SONT PAS EQUIVALENTES !

II. Méthode de résolution de l'équation du 1^er^ degré à 1 inconnue.

1. La méthode se résume par la formulation suivante : ON ISOLE l'inconnue.

   Les moyens de cet OBJECTIF sont les règles fondamentales 1 et 2. vues plus haut.

2. Un exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :
   $3(x - 7) - 5(x + 12) - 2x = -7x - (3x + 11) - 2(4x - 5)$
   1ère étape : on développe et on réduit chacun des deux membres INDEPENDAMMENT.
   On obtient alors une équation équivalente de type : $ax + b = cx + d$
   Ici a = b = c = d =

   2e étape : on utilise la règle fondamentale 1. et on obtient alors une équation équivalente du type : $Ax = B$
   Ici A = B =

   1er cas : $A \neq 0$ l'équation (E) a alors une solution et une seule $x = \frac{B}{A}$

   2e cas : $A = 0$

   si de plus $B = 0$ alors tout réel est solution de (E).

   si $B \neq 0$ alors (E) n'a AUCUNE solution dans $\mathbb{R}$.

   Ici la conclusion est :

III. Equations se ramenant au 1^er^ degré.

1. Equations – produit.

Exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :
$(3x - 5)(x + 11)(-4x - 7) = 0$
On utilise la règle : **un produit est NUL si et seulement si l'un de ses facteurs est NUL.**
Ici (E) est donc équivalente à

et les solutions sont :

Contre-exemple : $(7x - 5)(x + 13) = 1$
Là il n'est pas question de raisonner de la même façon : un produit pouvant être égal à 1 sans que l'un de ses facteurs soit égal à 1 !!

2. Equations nécessitant un développement.

Exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :
$(7x - 1)(x + 11) = 7x^2 - 13x + 4$

3. Equations nécessitant une factorisation.

Exemple type N°1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :
$(7x - 1)^2 = (2x - 9)^2$

Exemple type N°2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :
$(5x - 3)(-4x + 1) = (3 - 5x)(2x - 13)$

4. Equations où l'inconnue figure au dénominateur.

Exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :

$$\frac{2}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{3x - 11}{x^2 - 4}$$

1ère étape : Il est nécessaire que $x - 2 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$
On dit qu'on résout l'équation (E) dans $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{2 ; -2\}$

2e étape : Dans $\mathscr{D}$ l'équation (E) est équivalente à :

$2(x + 2) - 7(x - 2) = 3x - 11$ en utilisant la règle fondamentale 2. (légitime car x est différent de 2 et de -2)

Il reste à résoudre cette équation.

La solution est :

Remarque : si le calcul donne une valeur exclue, l'équation (E) peut ne pas avoir de solution.

IV. Résolution des problèmes.

La méthode est en 4 étapes :

1. Choix de l'inconnue : Il s'agit de repérer dans l'énoncé ce qui est à chercher. Tenir compte des unités s'il y a lieu et également des obligations qui découlent de la situation concrète : par exemple l'inconnue est un nombre positif ou un entier etc…
2. Mise en équation : Il s'agit de traduire mathématiquement l'énoncé français. C'est, en général, l'étape la plus « difficile ».
3. Résolution : C'est une étape purement technique où le problème « concret » est provisoirement « oublié » et ou on applique les techniques vues plus haut en II et III.
4. Conclusion et vérification : On revient au problème « concret » pour donner une conclusion et vérifier que ce problème admet bien une solution. On peut être amené à REJETER une solution mathématique trouvée en 3.

Un exemple type. Résoudre le problème suivant :

La vie de Diophante : l'histoire nous a laissé peu de renseignements sur la vie de Diophante, remarquable mathématicien grec du Ill' siècle. Tout ce que nous savons de lui a été puisé dans une inscription gravée sur sa tombe et rédigée sous forme d'un problème mathématique. La voici :

Passant! Ci-gît Diophante,
Les chiffres diront la durée de sa vie
Sa douce enfance en fait le sixième
Un douzième de sa vie a passé, et son menton s'est couvert de duvet
Marié, il a vécu le septième de sa vie sans enfants
Cinq ans ont passé; la naissance d'un fils l'a rendu heureux
Le sort a voulu que la vie de ce fils soit deux fois plus courte que celle de son père
Plein de tristesse, le vieillard a rendu l'âme quatre ans après la mort de son fils
Dis, passant quel âge avait atteint Diophante lorsque la mort l'a enlevé ?

V. Inéquations.

1. Inégalités et inéquations.

$2 + 5 \geq 4$ est une inégalité VRAIE
$2 + 5 > 8$ est une inégalité FAUSSE
$x + 5 \geq 7$ est une inégalité NI VRAIE, NI FAUSSE. C'est une INEQUATION. Elle contient un nombre variable x appelé INCONNUE de l'inéquation.
$x + 5$ est appelé 1er membre ou membre de gauche de l'inéquation.
7 est appelé 2^{e} membre ou membre de droite de l'inéquation.

2. Définition : RESOUDRE une inéquation c'est trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue qui rend(ent) l'inégalité VRAIE.

3. Exemples d'inéquations.

$3x + 7 \leq 2(x - 5)$	inéquation du 1er degré à 1 inconnue (vue au collège)
$5x^2 + 3x - 7 \geq 0$	inéquation du 2^{e} degré à 1 inconnue (vue en 1ère)
$x^3 - 5x^2 + 7x - 11 < 0$	inéquation du 3^{e} degré à 1 inconnue
$2x + 7y - 13 \geq 0$	inéquation du 1er degré à 2 inconnues.

4. Le référentiel.

RETENEZ : l'ensemble de nombres dans lequel on résout une inéquation a une grande importance : selon l'ensemble choisi, une même inéquation peut avoir des solutions ou ne pas en avoir !
L'ensemble des nombres dans lequel on résout une inéquation est parfois appelé « référentiel de l'inéquation ».

5. Inéquations équivalentes.

Deux inéquations sont dites équivalentes si elles ont exactement les mêmes solutions.
Exemple : $4x - 8 < 7x + 11 \Leftrightarrow 3x > -19$

6. Les règles fondamentales.

Règle 1 : On transforme une inéquation en une inéquation EQUIVALENTE en ajoutant (ou retranchant) le même nombre aux deux membres de l'inéquation.
Exemple : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow 4x - 8 \mathbf{\underline{+\ 8}} > 0 \mathbf{\underline{+\ 8}}$

Règle 2 : On transforme une inéquation en une inéquation EQUIVALENTE en multipliant (ou en divisant) par le même nombre NON NUL les deux membres de l'inéquation à condition de tenir compte de ce qui suit :
si le nombre est strictement POSITIF on ne change pas le sens de l'inégalité.
si le nombre est strictement NEGATIF on **change le sens de l'inégalité.**

Exemples : $4x \le 8 \Leftrightarrow 4x \times \frac{1}{4} \le 8 \times \frac{1}{4}$ **car** $\frac{1}{4} > 0$

$-7x \le 9 \Leftrightarrow -7x \times \left(-\frac{1}{7}\right) \ge 9 \times \left(-\frac{1}{7}\right)$ **car** $\left(-\frac{1}{7}\right) < 0$

VI. Méthode de résolution de l'inéquation du 1er degré à 1 inconnue.

1. La méthode se résume par la formulation suivante : ON ISOLE l'inconnue.

   Les moyens de cet OBJECTIF sont les règles fondamentales 1 et 2. vues plus haut.

2. Un exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) :
   $5(x-9) - 4(x+2) - 8x \ge -7x - (2x-8) - 3(6x-7)$

   1ère étape : on développe et on réduit chacun des deux membres INDEPENDAMMENT.
   On obtient alors une inéquation équivalente de type : $ax + b \ge cx + d$
   Ici a = b = c = d =

   2e étape : on utilise la règle fondamentale 1. et on obtient alors une inéquation équivalente du type : $Ax \ge B$

   Ici A = B =

   Les solutions sont alors :

VII. Inéquations se ramenant au 1er degré.

1. Inéquations – produit : les tableaux de signes.

   Exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) :
   $(3x-5)(x+11)(-4x-7) \ge 0$

2. Inéquations où l'inconnue figure au dénominateur.

   Exemple type. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) :

   $$\frac{4}{x-5} - \frac{9}{x+5} < \frac{2x-13}{x^2-25}$$

   1ère étape : Il est nécessaire que $x - 5 \neq 0$ et $x + 5 \neq 0$ et $x^2 - 25 \neq 0$
   On dit qu'on résout l'inéquation (I) dans $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{5 ; -5\}$

   2e étape : Dans $\mathscr{D}$ l'inéquation (I) est équivalente à :

   ATTENTION : **Se ramener au cas où 0 figure seul dans le 2e membre !!**

   Il reste à résoudre cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

VIII. Résolution des problèmes.

La méthode est en 4 étapes (idem que pour les équations).

1. Choix de l'inconnue : Il s'agit de repérer dans l'énoncé ce qui est à chercher. Tenir compte des unités s'il y a lieu et également des obligations qui découlent de la situation concrète : par exemple l'inconnue est un nombre positif ou un entier etc…
2. Mise en inéquation : Il s'agit de traduire mathématiquement l'énoncé français. C'est, en général, l'étape la plus « difficile ».
3. Résolution : C'est une étape purement technique où le problème « concret » est provisoirement « oublié » et ou on applique les techniques vues plus haut.
4. Conclusion et vérification : On revient au problème « concret » pour donner une conclusion et vérifier que ce problème admet bien des solutions.