Quelques repères pour l'initiation à la fonction de FILTRAGE EN FREQUENCE

1- Il est indispensable de faire une **étude** en **régime sinusoïdal** pour déterminer le **type de filtre**. Cette étude sera menée à l'aide des **nombres complexes** et des **lois générales adaptées** à la **notation complexe** : **impédances** $\underline{Z}$ pour les mises en **série, admittances** $\underline{Y}$ pour les mises en **parallèle**, lois des nœuds, des mailles , diviseur de tension ,de courant, théorèmes de Thévenin, Norton, superposition, Millman...L'**objectif** est d'établir la **fonction de transfert complexe** $\underline{T}$ dont la définition est : $\underline{T} = \dfrac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}}$ .Cette fonction de transfert **est** une **fonction mathématique** de la **variable** f , **fréquence** de la **tension d'entrée sinusoïdale** $u_e = \hat{U}_e \sin(2\pi f t + \varphi_e)$ elle même remplacée par son expression complexe en « module et argument » symboliquement écrite $\underline{U_e} = [U_e, \varphi_e]$. L'écriture U_e (sans barre) représente la **valeur efficace** de u_e soit $U_e = \dfrac{\hat{U}_e}{\sqrt{2}}$ .Au début on sera préoccupé par une succession d'opérations dont le but est d'obtenir l'une des formes canoniques (écriture traditionnelle) simple du genre : $\underline{T} = \dfrac{\underline{T_0}}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}$ pour un **passe-bas du 1^er^ ordre**, $\underline{T} = \dfrac{\underline{T_0}}{1 - j\dfrac{f_0}{f}}$ pour un **passe-haut du 1^er^ ordre** et $\underline{T} = \dfrac{\underline{T_0}}{1 + jQ_0(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f})}$ pour un **passe-bande du 2^ème^ ordre.**

Conseil : calculer autant que possible en $R, \underline{Z_L}, \underline{Z_c}, \underline{Y_L}, \underline{Y_C}$ et n'introduire j, L, C, ω que tardivement.

2- D'après la **définition** de $\underline{T}$, le **module** T **fournit** la relation : $|\underline{T}| = T = \dfrac{U_S}{U_e} = \dfrac{\hat{U}_S}{\hat{U}_e}$. Ce module **est encore fonction** de la fréquence f de u_e .Il **va nous indiquer** quelle sera l'**évolution** de l'**amplitude de la sortie** $\hat{U}_S$ **lorsque** f **sera variée**. Ainsi en supposant, pour simplifier , que $\hat{U}_e$ conserve une valeur inchangée :

si T **culmine** à une valeur souvent notée T_{Max} c'est que l'**amplitude** $\hat{U}_S$ **culmine aussi en sortie** !.Il y a **transmission du signal** sans qu'il soit pour autant « amplifié ».Symboliquement $\hat{U}_e \rightarrow \hat{U}_{SMax}$ à f

si $T \rightarrow 0$ c'est que $\hat{U}_S \cong 0$ le **signal** n'est **pas transmis** $\hat{U}_e \rightarrow \hat{U}_S \cong 0$ à f

> Si à f on connaît T et $\hat{U}_e$, alors on connaît $\hat{U}_S$

Entre les valeurs extrêmes T_{Max} et 0 de T se situe la **valeur** particulière **importante** $\dfrac{T_{Max}}{\sqrt{2}}$ qui permet , par **résolution** d'inconnue f , de trouver la (ou les) **fréquence de coupure** et d'en déduire la **bande passante** .

Attention : f_0 **qui figure** dans les **trois formes canoniques** ci-dessus n'est fréquence de coupure **que** du passe-bas et du passe-haut du 1^er^ ordre , pour le **passe-bande** f_0 est la **fréquence centrale** ou « d'**accord** ».

> L'**équation** $T = \dfrac{T_{Max}}{\sqrt{2}}$ **résolue** en f donnera la (ou les) **fréquence de coupure**.

3-Le **gain** $G = 20\log T$, exprimé en dB : c'est une **autre façon** de relier les **amplitudes** $\hat{U}_e$ et $\hat{U}_S$.
Lorsque T **culmine** à T_{Max} alors G **culmine** à G_{Max}. De même si $T \rightarrow 0$ alors $G \rightarrow -\infty$.

En revanche lorsque $T = \frac{T_{Max}}{\sqrt{2}}$ alors $G = G_{Max} - 3dB$ d'où le nom de « fréquence de coupure à $-3dB$ du gain »

Remarque : $\log T = \frac{G}{20} \Rightarrow T = 10^{\frac{G}{20}}$

$$\boxed{\text{Si à } f \text{ on connaît } G \text{ et } \hat{U}_e \text{, alors on connaît } \hat{U}_S}$$

4-D'après la **définition** de $\underline{T}$, l'**argument** de $\underline{T}$ est un **angle** (orienté donc un nombre algébrique) noté φ qui n'est autre que le **déphasage de** u_S **par rapport à** u_e .

Schématiquement les §2 ,§4 dans le cas simple où l'on pose « phase à l'origine φ_e de u_e égale à 0 » se résument d'après le synoptique suivant :

$$\boxed{u_e = \hat{U}_e \sin 2\pi ft} \longrightarrow \boxed{\text{Filtre } \underline{T} = [T,\varphi] \quad T = \frac{\hat{U}_S}{\hat{U}_e} \quad \arg \underline{T} = \varphi} \longrightarrow \boxed{u_S = T\hat{U}_e \sin(2\pi ft + \varphi)}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

5-Premiers usages de filtres.

En pratique l'**entrée** d'un filtre est bien souvent **périodique sans** pour autant **être sinusoïdale**. Le signal u_e ,de **période** T_e donc de **fréquence** $f_e = \frac{1}{T_e}$, est constitué par une **somme de termes** (FOURIER) d'écriture simplifiée :

$$u_e = \overline{u_e} + \underbrace{\hat{U}_{e1}\sin(2\pi f_e t + \varphi_1)}_{\text{terme fondamental de fréquence égale à celle de } u_e \text{ soit } f_e} + \underbrace{\hat{U}_{e2}\sin(2\pi 2 f_e t + \varphi_2)}_{\text{terme harmonique 2 de fréquence double de celle de } u_e \text{ soit } 2f_e} + \underbrace{\hat{U}_{e3}\sin(2\pi 3 f_e t + \varphi_3)}_{\text{terme harmonique 3 de fréquence triple de celle de } u_e \text{ soit } 3f_e} + \ldots\ldots$$

Composante continue ou valeur moyenne **fréquence nulle** : $\overline{u_e}$

L'**intérêt** de la fonction filtrage est de **traiter différemment chacun des termes** (ou un ensemble de termes) de u_e soit en le transmettant , soit en l'éliminant , soit en modifiant son amplitude ,soit en modifiant sa phase etc...En **sortie**, d'après le **théorème de superposition** , nous pourrons **caractériser** le signal u_S .

> Ainsi **chaque terme présent** dans u_e , **compte tenu de sa fréquence**, **se verra modifié** du fait des propriétés de $\underline{T} = [T,\varphi]$ **à cette fréquence**.

Le passe-bas **transmettra la composante continue** de u_e et supprimera le fondamental et les harmoniques ,du moins s'il a une fréquence de **coupure** f_c **très inférieure** à la fréquence f_e de u_e (dès $f_c \langle \frac{f_e}{100}$, donc au moins 2 décades en dessous de f_e). Bref , **le passe-bas sert à récupérer la composante continue**.

Attention : si pour la **fréquence nulle** $\underline{T}$ est un **réel négatif** alors la **composante continue** de u_e sera **changée de signe** !

Le passe-haut transmettra le fondamental et les harmoniques de u_e , si $f_c \langle \frac{f_e}{100}$, en revanche il **supprimera** la **composante continue**. Bref , **le passe-haut sert à éliminer la composante continue**.

Le passe-bande (sélectif ,donc avec $Q_0 \rangle 10$) transmettra **l'un des termes** de u_e (donc un signal sinusoïdal) **si** sa fréquence d'**accord est égale** à celle de **ce terme** de u_e .Bref ,**le passe-bande sélectif transmet au mieux un des termes de** u_e .

Attention : si pour la **fréquence d'accord** $\underline{T}$ est un **réel négatif** alors la **composante** de u_e **transmise** se voit **affectée** d'un **déphasage** de π .

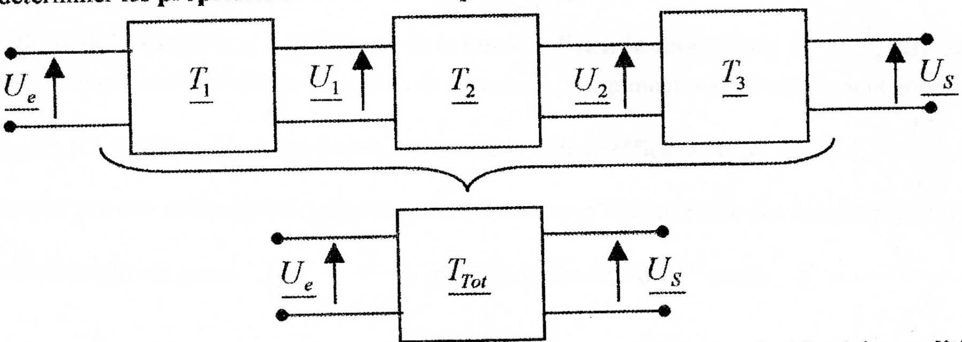
6-Le **spectre amplitude-fréquence** ne tient **jamais** compte des **déphasages** des termes **ni** d'éventuels **signes** placés devant eux.

Un signal <u>sinusoïdal pur</u> a un <u>spectre</u> qui ne comporte qu'<u>une seule raie</u>

En conséquence dès qu'un signal présente un **spectre** avec **plus d'une raie** on peut affirmer qu'**il ne s'agit pas** d'un signal **sinusoïdal**.

7-Mise en **cascade** de plusieurs filtres. C'est une **pratique** très **intéressante** s'il s'agit de **filtres actifs à AOP** pour lesquels nous savons que les **impédances de sortie** sont **nulles**. Ainsi l'**entrée** du **filtre** placé en **aval** ne **charge pas** la **sortie** du **filtre** placé en **amont**. La mise en cascade de filtres passifs peut être réalisée en interposant un AOP « suiveur » entre chaque filtre. On réalise aussi ,**sous certaines conditions** (résistance de **charge** itérative ou **caractéristique**), des mises en cascades de filtres passifs sans interposer d'AOP...

Nous voulons déterminer les **propriétés** de l'**ensemble** à partir des propriétés de chaque filtre inséré dans la cascade.



$\underline{T_1}, \underline{T_2}, \underline{T_3}$ etc..sont les **transmittances établies isolément** pour **chaque filtre** ,donc **à vide**. A la **condition** déja signalée ci-dessus à savoir **que** le **filtre** placé en **aval** ne **charge pas** le **filtre** en **amont** (ce qui est le cas lorsque l'impédance de sortie du filtre en amont est nulle) on obtient la **fonction de transfert globale** , $\underline{T_{Tot}}$, d'après :

$\underline{T_{Tot}} = \dfrac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}} = \underline{T_1}.\underline{T_2}.\underline{T_3}$ .... On en déduit : $\lvert\underline{T_{Tot}}\rvert = T_1.T_2.T_3$... donc $G_{Tot} = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$ et
$\arg \underline{T_{Tot}} = \arg \underline{T_1} + \arg \underline{T_2} + \arg \underline{T_3} + ..$ donc $\varphi_{Tot} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + ..$

8-Rappels de quelques **règles de calcul** :

8-1 Pour les complexes : $j^2 = -1$; $\dfrac{1}{j} = -j$; $(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$; $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$|a - jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\arg(réel.positif) = 0$; $\arg(réel.négatif) = \pm\pi$; $\arg(a + jb) = \theta$ et

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ **<u>mais alors</u>** θ sera **connu** à $\pm\pi$ **près** ! L'ambiguïté est levée **soit** à l'aide d'une représentation de **l'image du nombre** $a + jb$ dans le **plan complexe soit au vu** des **signes** de a et de b puisque $a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$, les signes de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ étant connus ($\rho = module = réel.positif$) on en **déduit** le **quadrant** où se situe l'image du nombre complexe et θ est défini.

Module d'un **produit**= **produit** des **modules** ; **argument** d'un **produit** = **somme** des **arguments**

Module d'un **quotient** = **quotient** des **modules** ; **argument** d'un **quotient** = **argument** du **numérateur** **<u>moins</u>** **argument** du **dénominateur**.

Ne pas oublier que $RC\omega$ est **sans unité** donc RC est **l'inverse d'une pulsation**.
De même $\dfrac{L\omega}{R}$ est **sans unité** donc $\dfrac{L}{R}$ est **l'inverse d'une pulsation**

8-2 Pour les logarithmes (ici de base 10 ou logarithmes décimaux) : $\log 10^n = n$; $\log 0^+ \to -\infty$;

$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$; $\log(a.b) = \log a + \log b$; $\log\dfrac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log x^n = n\log x$ ainsi

$\log x^2 = 2\log x$ et $\log\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\log x$.