Tp-Exo Φ 14 SATELLITES

Satellite gravitant sur une orbite circulaire.

On s'interesse au mouvement d'un satellite artificiel S de masse $m_S = 400$ kg, en orbite circulaire (rayon d_T) autour de la Terre de masse M_T, de rayon R_T et de centre O. On suppose que la Terre et le satellite sont des sphères et qu'elles présentent une répartition de masse à symétrie sphérique. Le satellite est à l'altitude h.

1°) Pourquoi est-il important de préciser que la répartition de la masse des corps est à symétrie sphérique ?

2°) Exprimer l'orbite d_T du satellite en fonction des données du problème.

On appelle $\vec{F_S}$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite. Cette force dépend de la position du satellite et on pose $\vec{F_S} = m_S \cdot \vec{g(h)}$. On note g(h) l'intensité de la pesanteur $\vec{g(h)}$ à l'endroit où se trouve le satellite: $\left|\vec{g(h)}\right| = g(h)$.

3°) Dans quel référentiel faut-il placer l'étude ?

4°) Exprimer la valeur F_S de la force $\vec{F_S}$ exercée par la Terre sur le Satellite.

5°) Exprimer g(h) en fonction de M_T, R_T, h et G. En déduire l'expression de $g_0 = g(0)$.

6°) En déduire l'expression de g(h) en fonction de R_T, h et g_0.

7°) Appliquer la deuxième loi de Newton au satellite en orbite circulaire.

8°) Préciser les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ du satellite.

9°) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

10°) Etablir l'expression de la vitesse v_S du satellite en fonction de g_0, R_T et h.

11°) Définir la période de révolution T_S et donner son expression avec les mêmes paramètres que v_S.

12°) Montrer qu'on retrouve ainsi la troisième loi de Kepler qui indique que T_S^2/d_T^3 = Cste; préciser l'expression, dans la situation présente, de la constante.

13°) Calculer v_S et T_S .
Données numériques. $g_0 = 9{,}8$ m.S^{-2} - h = 200 km - R_T = 6 400 km - G = 6,67 x 10^{-11} S.I.

Disposition d'une série d'objets ponctuels sur une même orbite.

Soit un chapelet d'objets assimilables à des points matériels, mais de tailles et de masses différentes, satellisés autour de la Terre sur une même orbite circulaire de rayon r qu'ils parcourent dans le même sens. La figure 1 donne la configuration de ces objets à un instant de date donnée (les échelles de taille des objets, par rapport à la Terre, n'ont pas été respectées). On fait l'hypothèse que les interactions gravitationnelles entre ces objets sont négligeables et que seule celle de la Terre intervient.

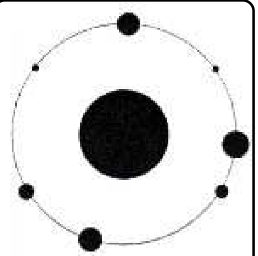


Figure 1.

14°) Tous ces objets ont-ils la même vitesse sur l'orbite ? Justifier.

15°) Comment évolue la structure de l'ensemble au cours du temps ?

Disposition de deux objets ponctuels sur deux orbites de rayons différents.

Soient deux objets A et B, assimilables à des points matériels, satellisés autour de la Terre sur deux orbites circulaires de rayons r_A et r_B différents ($r_A > r_B$) mais de valeurs voisines. La figure 2 donne la configuration de ces objets à un instant de date donné: ils sont disposés de façon que la direction AB passe par O, le centre de la Terre; la flèche indique le sens des mouvements (les échelles des rayons n'ont pas été respectées). On considère que l'interaction gravitationnelle entre ces deux objets est négligeable et que seule la Terre intervient.
A une date ultérieure, l'objet A a effectué exactement une révolution autour de la Terre; on souhaite savoir où se trouve l'objet B sur son orbite.

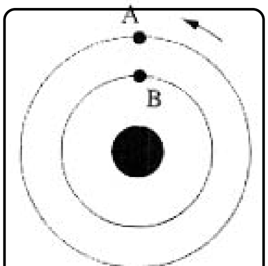
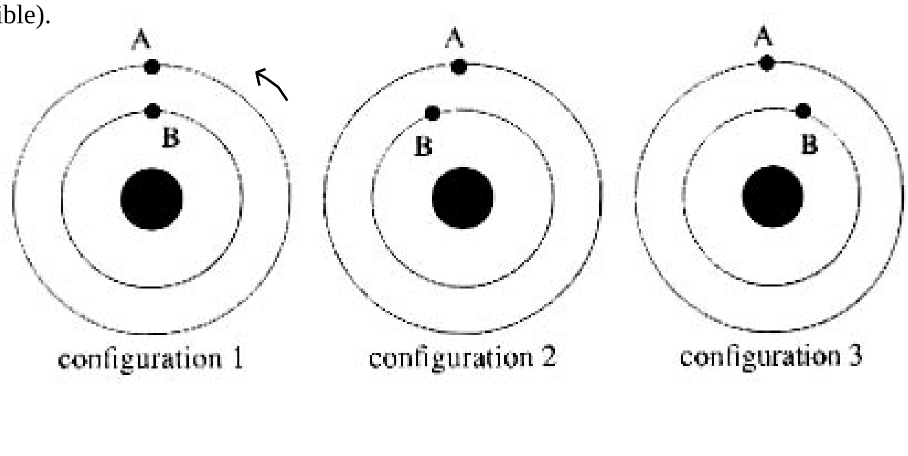


Figure 2.

16°) Indiquer, en justifiant, laquelle des trois configurations proposées dans la figure ci-dessous est possible 1 seule réponse est possible).



On s'interesse à la descente du satellite. Elle se décompose en deux phases.

Descente du satellite: 1ère phase

Pendant cette phase, le champ de pesanteur g est supposé uniforme ($g = 9,80\ m.s^{-2}$). L'axe des z est choisi parallèle à $\vec{g}$ et de même sens.
On admet que l'ensemble des forces exercées par l'air sur le satellite peut se modéliser par une force de frottement dont la valeur f est reliée à la vitesse par la relation:

$$f = k \cdot v^2 \text{ avec } k = 1,57 \text{ unités S.I.}$$

On néglige la poussée d'Archimède dans le bilan.

17°) Peut-on parler d'une chute libre ?

18°) Pourquoi peut-on négliger la poussée d'Archimède ?

19°) A partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de la constante k dans le Système International.

20°) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v(t), au cours de la chute. On utilisera un axe orienté vers le bas.

Soient
- ❑ *v_n, la vitesse à l'instant t_n*
- ❑ *v_{n+1} la vitesse à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.*

21°) Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme:

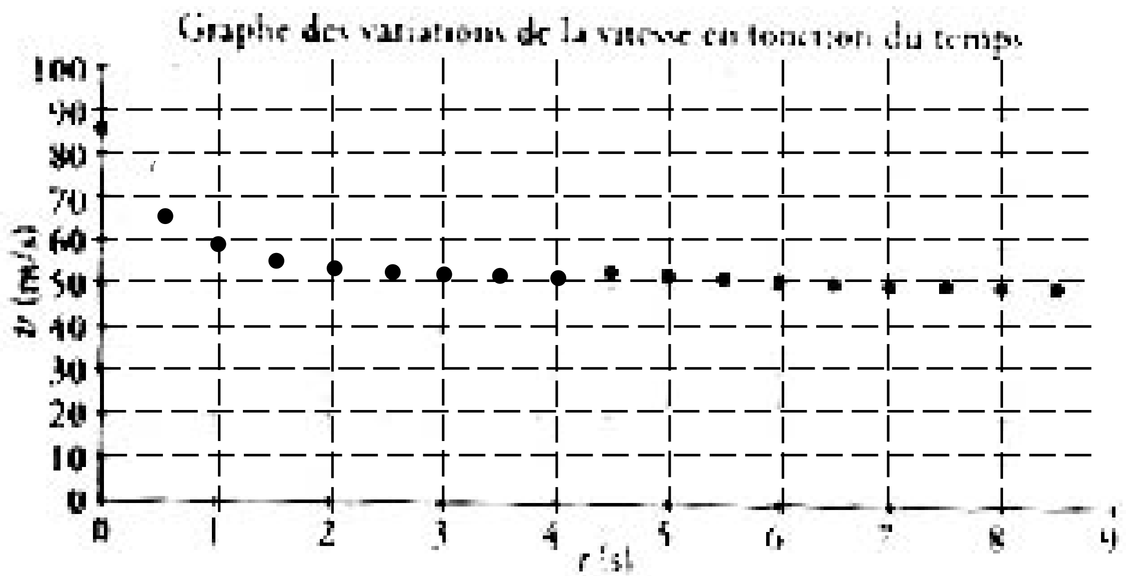
$$v_{n+1} = v_n + (A - B \cdot v_n^{\ 2})\ \Delta t$$

La courbe d'évolution de la vitesse au cours du temps est représentée ci-après.

22°) A l'aide des données numériques du problème, montrer que l'équation différentielle correspond numériquement à:

$$v_{n+1} = v_n + (9,80 - 3,92 \times 10^{-3} \cdot v_n^{\ 2})\ \Delta t$$

déterminer les unités de A et B



23°) Comment peut-on retrouver, à partir de ce document, les valeurs de A et B ? En déduire une méthode pour déterminer une valeur approchée de l'intensité de pesanteur ?

24°) En utilisant le graphe représentant la vitesse v en fonction du temps calculée avec la relation précédente, indiquer:
- ❑ l'ordre de grandeur de la durée nécessaire pour atteindre la vitesse limite;
- ❑ la valeur de cette vitesse exprimée en $km.h^{-1}$.

La courbe précédente a en fait été obtenue par résolution de l'équation différentielle précédente par la méthode numérique itérative d'Euler. Un extrait de la feuille de calcul est représenté ci-après.

25°) Quel est la pas d'itération utilisé pour les calculs ?

26°) Expliquer la méthode d'Euler en effectuant les calculs de la vitesse à la date t_1 et de l'accélération à la date t_2.

Date t (s)	vitesse v ($m.s^{-1}$)	Accélération a = dv / dt ($m.s^{-2}$)
0	86,0	-19,19
0,5		-7,69
1,0	59,0	
1,5	55,1	-2,1
2,0	53,0	-1,2
2,5	51,8	-0,7
3,0	51,1	-0,4
3,5	50,6	-0,2
4,0	50,4	- 0,1

Descente du satellite: 2nde phase.

On suppose que le satellite, freiné par un parachute, descend maintenant d'un mouvement vertical rectiligne uniforme, de vitesse $\vec{v}_{Satellite}$ *de valeur* $v_{Satellite} = v_{lim}$ *déterminé précedemment.*

L'axe des z *est choisi toujours parallèle à* $\vec{g}$ *MAIS de sens opposé.Le sol terrestre supposé horizontal est pris comme planx* xOy *des coordonnées.*

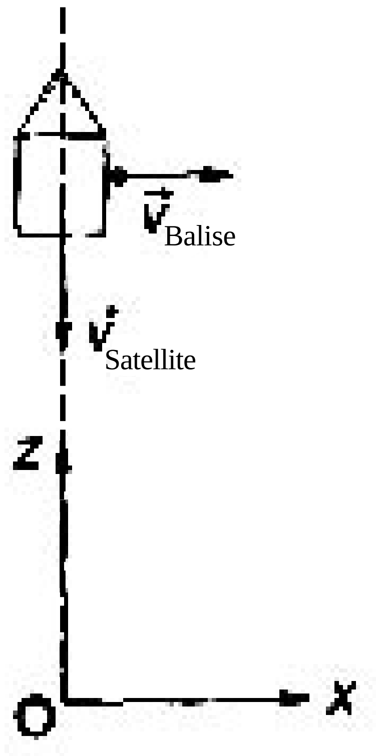
Le satellite étant arrivé au point M de coordonnées ($x_M = 0$*,* $z_M = 3{,}0$ *km), à un instant pris comme origine des temps, une balise radio est éjectée horizontalement du satellite dans le plan xOz avec le vecteur vitesse* $\vec{v}_{Balise}$ *(*$v_{Balise} = 2\ m.s^{-1}$*) par rapport au satellite: cela signifie qu'au point M, la balise radio a par rapport à la Terre, le vecteur vitesse initiale:*

$$\vec{V} = \vec{v}_{Satellite} + \vec{v}_{Balise}$$

Le mouvement du satellite est supposé non modifié par l'éjection de la balise.

Celle-ci tombe dans le champ de pesanteur terrestre, les frottements de l'air étant supposés négligeables.

On appelle
- z_S *l'altitude instantanée du satellite,*
- x_B *et* z_B *les coordonnées instantanées de la balise.*



27°) Déterminer les équations horaires $z_S(t)$, $x_B(t)$ et $z_B(t)$.

28°) Lequel des deux objets, le satellite ou la balise, touchera le sol le premier ?

29°) Quel est l'intervalle de temps qui sépare les deux arrivées ?

30°) Déterminer les coordonnées, pour les deux objets, du point d'impact.