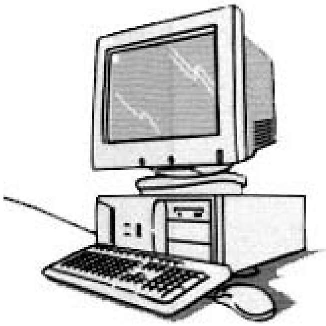
LES SYSTEMES OSCILLANTS

1. LE PENDULE ELASTIQUE: LE DISPOSITIF SOLIDE-RESSORT.

1.1. UNE APPROCHE EXPERIMENTALE.



Dispositif

On place un mobile autoporteur sur coussin d'air: le mobile se séplace sans frottements sur la table.

On fixe le mobile aux extrémités libres de deux ressorts horizontaux: ces deux ressorts sont équivalents à un ressort unique.

On écarte le mobile de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.

Observations.

Lâché, le mobile oscille librement autour de sa position d'équilibre. Ses oscillations sont de durée et d'amplitude constante au cours du temps.

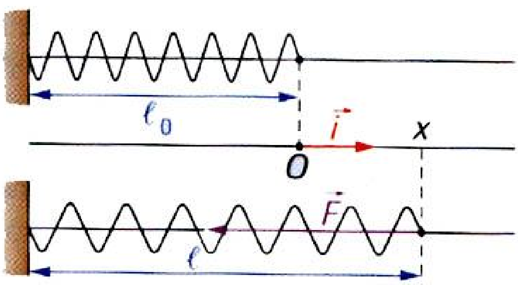
Interprétation.

Les oscillaitons du mobile, soumis à une force dite de rappel exercée par le ressort, sont périodiques. Le mobile, accroché au ressort, constitue un oscillateur mécanique, appelé pendule élastique.

1.2. UNE NOUVELLE FORCE A DEFINIR: LA FORCE DE RAPPEL

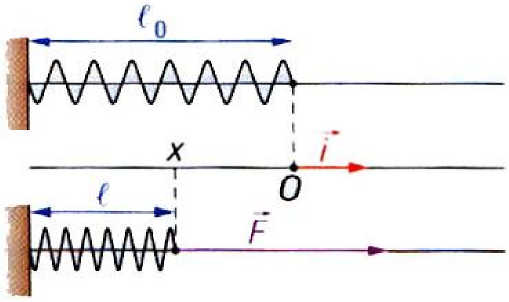
Soit un ressort horizontal.

- ***Si le ressort est allongé***,



le ressort a tendance à vouloir reprendre sa position d'équilibre. La force qu'il exerce est dirigée dans le sens opposé au vecteur unitaire $\vec{i}$.

- ***Si le ressort est comprimé***,



le ressort a tendance à vouloir reprendre sa position d'équilibre. La force qu'il exerce est dirigée dans le sens du vecteur unitaire $\vec{i}$.

Cette force est dirigée suivant l'axe du ressort et a pour expression vectorielle $\vec{F}_{\text{Ressort/Mobile}} = -\,k.x\,\vec{i}$. dans laquelle

- k est la raideur du ressort, exprimée en $N.m^{-1}$
- x la ***valeur algébrique*** de l'allongement du ressort exprimée en mètres.

Dans ce cas x est compté positivement, par conséquent le terme $-k.x < 0$ et on retrouve bien $\vec{F} = -k.x.\vec{i}$ opposé au vecteur $\vec{i}$

Dans ce cas x est compté négativement, par conséquent le terme $-k.x > 0$ et on retrouve bien $\vec{F} = -k.x.\vec{i}$ dans le sens du vecteur $\vec{i}$

Remarque.

Rigoureusement la proportionnalité entre l'allongement et la valeur de la force n'est vraie que si on ne dépasse pas la limite d'élasticité du ressort c'est-à-dire si le ressort reprend sa longueur initiale quand la déformation cesse.

Autre exemple (hors programme).

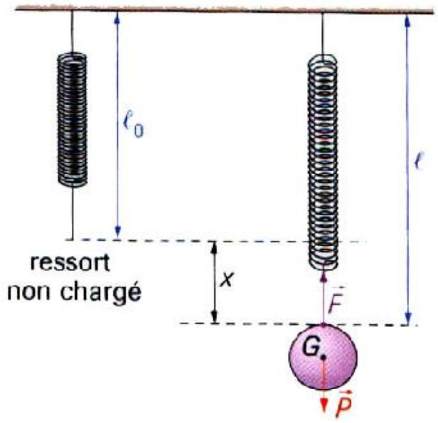
Une boule accrochée à un ressort vertical est soumise (si on néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air) à deux forces:

- son poids $\vec{p}$;
- la force $\vec{F}$ exercée par le ressort, verticale, dirigée vers le haut.

Cette force, exercée par le ressort allongé ou comprimé sur l'objet accroché à son extrémité libre, est appelé force de rappel.

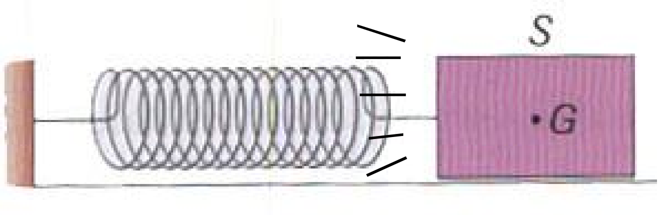
Pour conclure.

car en physique, on appelle force de rappel toute force qui tend à ramener un système vers sa position d'équilibre stable.



1.3. ANALYSE DU MOUVEMENT DU MOBILE.

L'étude théorique du pendule élastique horizontal est plus simple que celle du pendule élestique vertical.



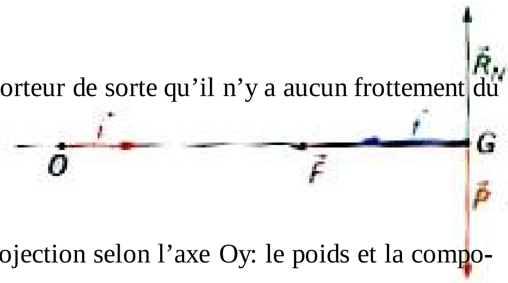
Nous allons étudier uniquement le mobile de masse m accroché à l'élastique, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

En première approximation, on néglige la poussée d'Archimède.

Quand le pendule est ***entrain de s'éloigner de sa position d'équilibre vers l'élongation.***

Le solide de masse m est soumis à:

- son poids P vertical et dirigé vers le bas;
- la force exercée par le ressort sur le mobile, appelé force de rappel
- l'action R exercée par le sol, perpendiculaire au sol car on a un mobile autoporteur de sorte qu'il n'y a aucun frottement du au sol.



On applique la deuxième loi de Newton: $\Sigma \vec{F}_{Ext} = \vec{p} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$

On projette sur les deux axes Ox et Oy: $0 - k.x = m.a_x$ $N - p = 0$

Le mouvement étant rectiligne selon l'axe Ox, il n'est pas utile de s'intéresser à la projection selon l'axe Oy: le poids et la composante normale ne font que se compenser.

Selon l'axe Ox, on en déduit, puisque $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ et $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ l'équation différentielle du mouvement:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Cette équation différentielle est caractéristique des systèmes oscillants qualifiés d'oscillateurs harmoniques.

Remarque. Dans le cas où on tient compte d'un frottement fluide dû à l'air, pour les faibles vitesses, cette force est proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = - \mu.v.\vec{i}$, alors l'équation différentielle prend la forme:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

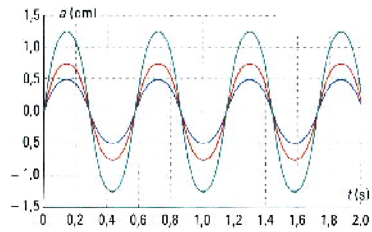
dans laquelle $\dfrac{\mu}{m}$ caractérise l'amortissement (c'est le terme associé aux frottements).

1.4. SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE: APPROCHE EXPERIMENTALE.

La courbe obtenue sur l'écran de l'ordinateur est périodique. On peut essayer de déterminer les aramètres expérimentaux qui ont une influence sur la valeur de la période T.

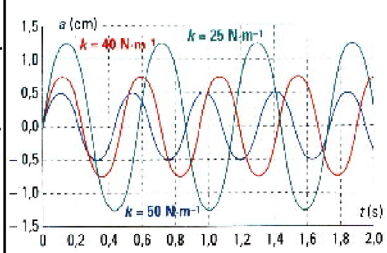
- ***Tableau 1.*** On mesure pour un palet donné (m_{Palet} = 709,9 g) mais pour ***différentes amplitudes***, la période.

X_{Max}	0,5 V	1,0 V	1,5 V
T (en ms)	630,2 ms	629,6 ms	629,5 ms



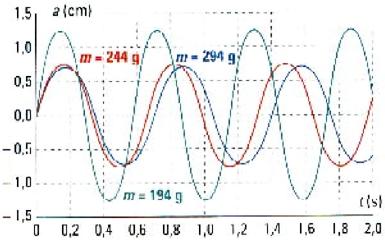
- ***Tableau 2.*** On mesure pour un palet donné (m_{Palet} = 709,9 g) mais pour ***différents ressorts***, la période.

$k_{Ressort}$	le ressort jaune k = 40,8 N/m	le ressort rouge k = 35,3 N/m	le ressort bleu k = 20,4 N/m	le ressort fin k = 17,1 N/m
T_{Exp} (en ms)	588 ms	630 ms	832 ms	908,6 ms
$T^2 \times k$	14,2	14,0	13,98	13,96
$T_{Théorique}$ (en ms)	586 ms	630 ms	828 ms	903,6 ms



- ***Tableau 3.*** On mesure pour un ressort donné (le rouge) mais pour ***différentes masses***, la période.

m (en g)	Le palet seul 709,9 g	Le palet + 1 bague 1064,2 g	Le palet + 2 bagues 1422,9 g
T_{Exp} (en ms)	630 ms	766 ms	883,4 ms
$\dfrac{T^2}{m}$	0,56	0,551	0,55
$T_{Théorique}$ (en ms)	630 ms	771,4 ms	892,0 ms



On constate que la période
- est indépendante de l'amplitude des oscillations: on dit que lorque la période propre d'un système oscillant est indépendante de l'écart à l'équilibre initial, on dit que les oscillations sont ***isochrones***;
- diminue avec la raideur des ressorts, elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de la constante de raideur k.
- augmente avec la masse, elle est proportionnelle à la racine carrée de la masse;

Remarque: on peut aisément vérifier que la période propre du pendule dépend de l'amplitude lorsque celle-ci est importante.

1.5. SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE: APPROCHE THEORIQUE.

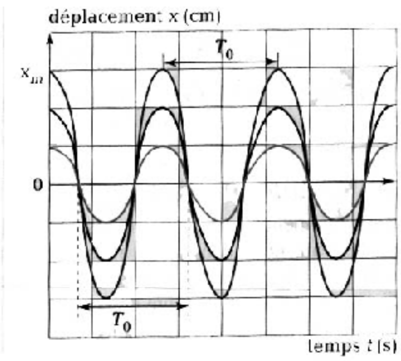
On peut montrer que la fonction périodique de la forme $x = x_{Max}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \phi_0)$ vérifie l'équation différentielle

avec x_{Max} est la plus grande valeur que peut prendre x: c'est l'amplitude
ϕ_0 est appelée la phase à l'origine des temps et s'exprime en radian.

On aura $\dfrac{dx}{dt} = - x_{Max} \dfrac{2.\pi}{T_0} \sin(\dfrac{2.\pi}{T_0}.t + \phi_0)$ soit $\dfrac{d^2x}{dt^2} = - x_{Max} \dfrac{4.\pi^2}{T_0^2} \cos(\dfrac{2.\pi}{T_0}.t + \phi_0) = - \dfrac{4.\pi^2}{T_0^2} x$

On en déduit $\dfrac{d^2x}{dt^2} = - \dfrac{4.\pi^2}{T_0^2} x$ soit $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{4.\pi^2}{T_0^2} x = 0$ de la forme $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m} x = 0$

Si on pose $\dfrac{4.\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{k}{m}$ soit $T_0 = 2.\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



Enregistrement des oscillations d'un pendule avec trois amplitudes différentes.

On définit ainsi la période propre T_0 de l'oscillateur, expression en accord avec les observations expérimentales sur les apramètres qui peuvent influer sur la valeur de T_0.

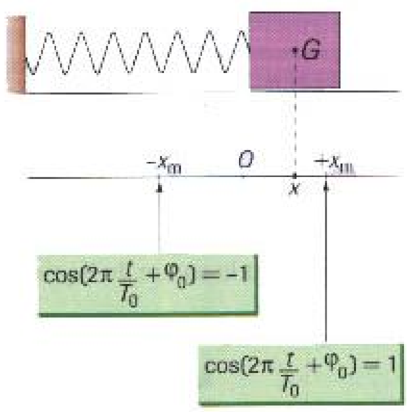
Remarque.
Si on revient à notre dispositif expérimental, constitué d'un ensemble de deux ressorts de raideur k, cet ensemble est équivalent à un ressort unique de raideur $k' = 2 . k$. On peut donc compléter la dernière ligne des tableaux 2 et 3.

1.6. EQUATION HORAIRE DU MOUVEMENT.

La fonction périodique de la forme $x = x_{Max}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \phi_0)$ vérifie l'équation différentielle

avec x_{Max} est la plus grande valeur que peut prendre x: c'est l'amplitude
ϕ_0 est appelée la phase à l'origine des temps et s'exprime en radian.

Cette solution générale vérifie l'équation différentielle du mouvement quelles que soient les valeurs de x_{Max} et ϕ_0 mais, à chaque mouvement correspond une solution particulière et une seule qui dépend des conditions initiales.
Déterminer l'équation horaire du mouvement, c'est déterminer les valeurs des constantes x_{Max} et ϕ_0



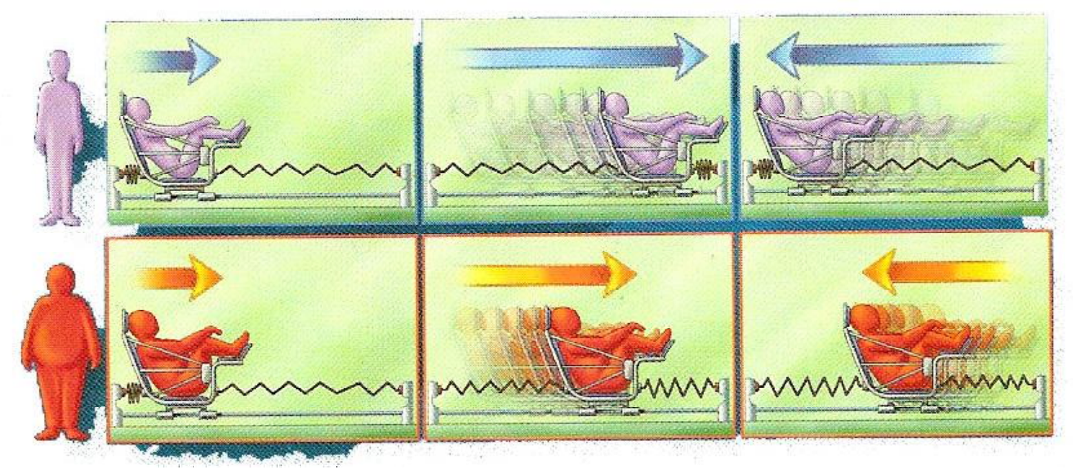
Exemple.
Supposons qu'à t = 0, on lâche le solide sans vitesse initiale d'une position x = a > 0.

L'équation horaire du mouvement avec pour conditions initiales une vitesse initiale initiale, d'une position x = a > 0 est:

$$x = a.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)$$

Comment se pèse-t-on en l'absence de gravité ?

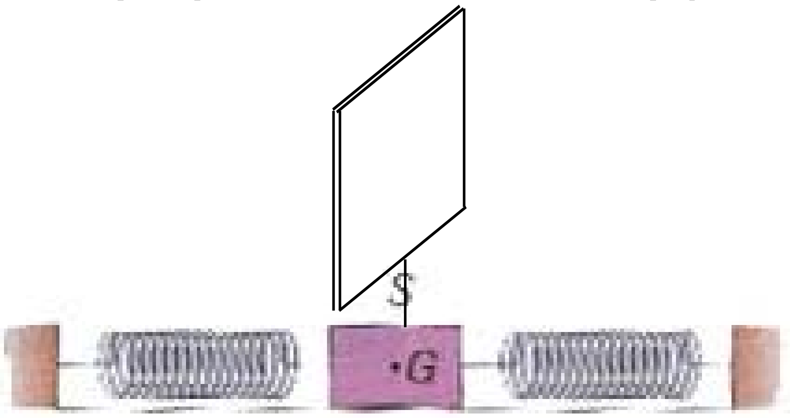
Sur le plancher des vaches, plus un corps est massif, plus il est attiré par la Terre, et plus il est difficile de le bouger. C'est la raison pour laquelle, dans une voiture qui accélère, vous vous sentez tiré en arrière. On appelle ça l'inertie. Dans l'espace, les astronautes ne «pèsent» rien. Essayez de monter sur une balance à bord de la station spatiale serait aussi utile que de le faire à bord d'une cage d'ascenseur en chute libre: comme tous les objets tombent à la même vitesse - aussi bien vous que le pèse-personne ou la cabine -, vous flottez librement dans l'ascenseur et votre corps n'appuie pas sur la balance qui indique alors «zéro». En revanche, l'inertie continue à marcher exactement comme sur Terre. Pour mesurer leur masse, les astronautes s'installent dans un siège coincé entre deux ressorts, qui mesure leur résistance à l'accélération. lorsqu'on tire le siège vers l'arrière et qu'on le lâche, il se met à osciller d'avant en arrière, d'autant plus lentement que la masse du gaillard sanglé dessus est grande. En chronométrant ces oscillations, et en comparant avec celui obtenu pour une masse connue, on connaît la masse de l'astronaute.

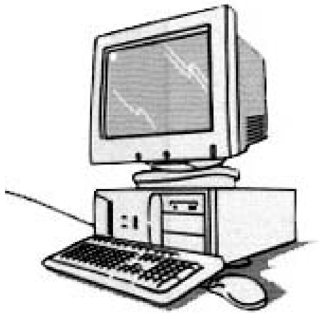


2. OSCILLATIONS MECANIQUES AMORTIES.

Dispositif

On reprend la dispositif précédent, mais on fixe sur le mobile une plaque de masse négligeable qui flotte dans l'air.





Dispositif

- Les expériences ont permis de constater que les oscillations du pendule (pesant ou élastique) cessent au bout d'un certain temps: les oscillations sont amorties: L'amortissement résulte essentiellement de l'effet des frottements de l'air sur le solide.

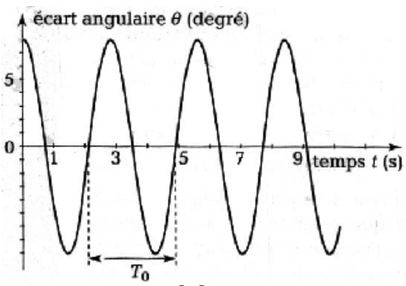
Pour un frottement faible, on observe:

- certe l'amplitude des oscillations diminue progressivement
- en revanche, la durée d'un aller retour reste pratiquement constante.

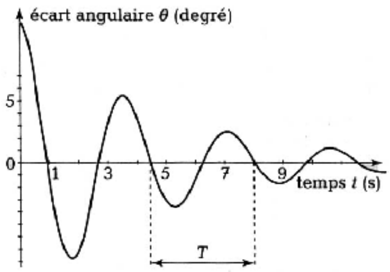
Le mouvement est alors qualifié de ***pseudo-périodique***. On qualifie un oscillateur qu'il est en régime pseudo-périodique, si ses oscillations se reproduisent de plus en plus atténuées mais à intervalles de temps égaux: La durée qui sépare deux passages, dans le même sens, par la position de repos est constante: c'est la pseudo-période T du mouvement.

Elle est très proche de la période propre T_0 pour un faible amortissement. Elle en diffère d'autant plus que l'amortissement est important.

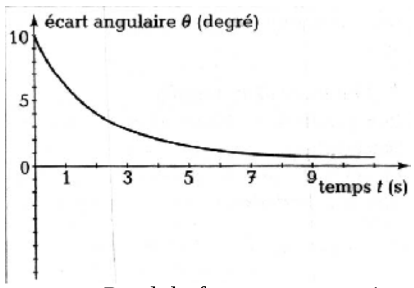
- Dans le cas où les frottements sont trop importants, écarté de sa position d'équilibre, le pendule retourne vers sa position de repos sans osciller: le mouvement est ***apériodique***.



Pendule non amorti
Mouvement périodique



Pendule faiblement amorti
Mouvement pseudo-périodique

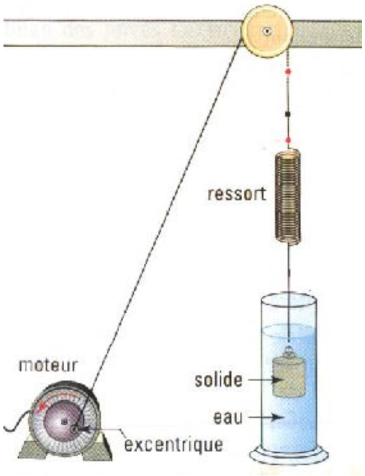


Pendule fortement amorti
Mouvement apériodique

- Le régime limite entre des deux régimes est dit ***critique***.

3. OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES.

3.1. APPROCHE EXPERIMENTALE.



Dispositif.

On accroche un solide de masse m à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de constante de raideur k.
On attache l'extrémité supérieure du ressort à un fil qui passe sur une poulie et dont l'autre extrémité est solidaire d'un excentrique entraîné par un moteur électrique.
On alimente le moteur en faisant varier sa fréquence de rotation.

Observations.

L'amplitude des oscillations du solide est maximale pour une fréquence f du moteur très légèrement inférieure à la fréquence propre f_0 du pendule élastique.

Interprétation.

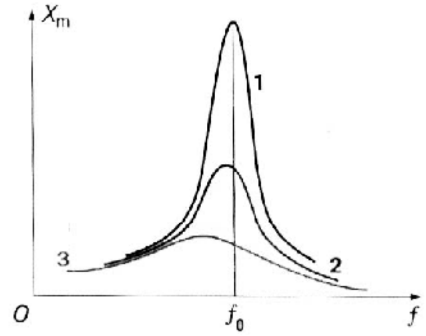
Lorsque le moteur tourne à la fréquence f, l'excentrique transforme som mouvement circulaire en mouvement sinusoïdal.

Le mouvement de l'excentrique est transmis au ressort par l'action du fil: l'extrémité supérieure A du ressort possède donc un mouvement rectiligne oscillatoire de fréquence f.

De la même manière, l'action du ressort transmet au solide un mouvement rectiligne oscillatoire de fréquence f et d'amplitude x_m: excité par le moteur (excitateur), le solide (le résonateur) est en oscillations forcées à la même fréquence que lui.

L'amplitude x_m des oscillations du solide est maximale lorsque celui-ci oscille à une fréquence particulière f imposée par le moteur: on dit alors qu'il est en résonance.

3.2. LA RESONANCE DANS LA VIE QUOTIDIENNE.



Un oscillateur mécanique est dit en oscillations forcées lorsque, soumis à l'action d'un autre oscillateur appelé excitateur, il oscille avec la période imposée par cet excitateur; l'oscillateur excité est appelé résonateur.

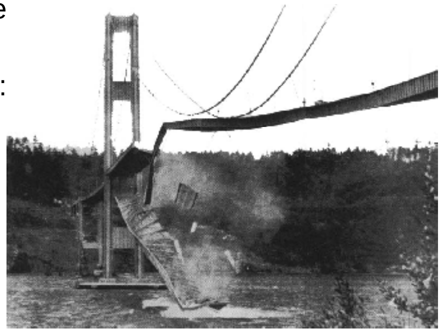
Pour une certaine période de l'excitateur, l'amplitude des oscillations du résonateur est maximale: on dit qu'il y a résonance d'amplitude.

La période du résonateur est d'autant plus voisine de la période propre du résonateur que l'amortissement de celui-ci est faible.

L'amplitude des oscillations à la résonance est alors très grande: la résonance est aigüe.

L'accroissement de l'amortissement du résonateur se traduit par une diminution de l'amplitude des oscillations forcées et apr une atténuation de la résonance: la résonance est alors floue.

Le phénomène de résonance mécanique se rencontre fréquemment. Il peut être utile ou gênant:



Domaine d'utilisation de la résonance.

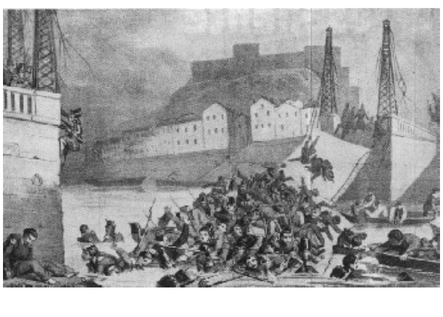
En acoustique, la membrane d'un haut-pleur doit vibrer avec une grande amplitude dans un domaine de fréquences audibles particulier: la membrane est un résonateur subissant une résonance floue et devant être fortement amorti.

Les phénomènes de résonance se manifestent également dans le four à micro-onde: la fréquence du rayonnement émis par le four, fait entrer en résonance les molécules d'eau présentes dans les aliments, dont le mouvement élève la température du milieu.

Domaine où la résonance mécanique est gênante.

La construction avec des ponts suspendus mis en vibration par le passage de troupes marchant au pas cadencé sont entrés en résonance et ont été détruits, par exemple, le pont d'Angers en 1860.

On sait enfin pourquoi le Millenium Bridge s'est mis à osciller le jour de son inauguration, le 10 juin 2000, provouqnt sa fermeture immédiate ! (Quoi que ... voir plus loin) Steve Strogatz, professeur de mécanique à l'université Cornell (Etats-Unis), s'est interessé au phénomène de résonance à l'origine du balancement de cette passerelle de 320 mètres. D'après ses calculs, il a suffi que 160 des 2 000 piétons ayant franchi simultanèment le pont ce jour-là marchent - involontairement ! - à l'unisson pour le faire tanguer. Facteur déterminant, la fréquence naturelle de résonance du pont était proche de la fréquence des pas humains. Une fois le balancement initié, les piétons ont adopté une démarche mal assurée, à la manière de patineurs, qui a amplifié les oscillations. Le pont a rouvert en 2002 après la pose de coûteux amortisseurs.



Les machines tournantes: lorsqu'une roue automobile n'est pas équilibrée (son centre d'inertie n'est pas sur l'axe de rotation de la roue), il apparaît une vibration gênante dans la conduite. Ces vibrations sur une machine tournante ont des conséquences très dommageables pour la machine et son environnement.

QUAND LES PIETONS FONT BALANCER LE PONT.

Deux jours. C'est le temps pendant lequel le Millenium Bridge est resté en service à Londres en 2000 après son inauguration, et avant sa fermeture précipitée. En cause ? Les oscillations latérales de l'ouvrage, aussi fortes qu'imprévues en période de grande affluence. Pour expliquer ce phénomène, des spécialistes avaient soutenu que les piétons empruntant le pont avaient synchronisé leurs pas à une fréquence proche de celle de la passerelle, provoquant un phénomène de résonance. Une situation similaire avait été à l'origine de la catastrophe du Tacoma Narrows, à Washington, en 1940 où le passage dune troupe marchant au pas avait causé la destruction du pont.

Rapportée au Millenium Bridge, cette explication laissait pourtant scptique: pourquoi une foule de promeneurs se serait-elle mise à marcher spontanèment en cadence ? Un ingénieur présente lui un autre modèle. D'après lui, l'importance des oscillations aurait été liée à une modification de la marche des piétons lorsque le pont s'est mis à bouger légèrement. En déplaçant leurs pieds un peu plus à gauche ou un peu plus à droite pour comenser les mouvements naissants, les marcheurs auraient amplifié le balancement. A l'image des enfants qui balancent et replient leurs jambes pour accentuer le mouvement de leur balancoire.

SVJ - Fevrier 2009.

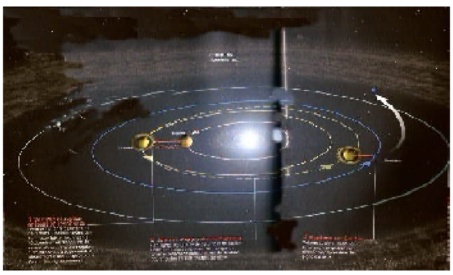
3.3. LA RESONANCE EXPLIQUE L'ENFANCE DU SYSTEME SOLAIRE

UN EVENEMENT CATACLYSMIQUE.

Pourquoi les orbites des planètes sont elliptiques et non pas circulaires ? Qu'est-ce qui a bien pu creuser tous les cratères qui défigurent la lune ? Car lorsque Neil Amstrong remène sur Terre une poignée de roches lunaires, leurs analyses laissent les scientifiques dans une profonde perplexité: les cratères qui criblent la surface de la Lune ont tous été creuss au même moment, environ 700 millions d'années après la naissance du système solaire, par un terrible bombardement d'astéroïdes. Cet événement cataclysmique, nul doute que la Terre en fut également victime, sauf que les perpétuels mouvements de sa croûte en ont effacé peu à peu les cicatrices. Notre petite planète a dû, à l'époque, recevoir en moyenne un corps d'un kilomètre de diamètre tous les vingt ans. Par comparaison, dans le système solaire actuel, une telle collision se produit statistiquement tous les 500 000 ans... Qu'est-ce qui a bien pu déclencher une telle furie dans le système solaire, qui plus est à une époque a priori calme, où les planètes étaient déjà formées depuis longtemps ? Une réponse est donnée ujourd'hui: le bombardement qui a défiguré la Lune a été déclenchée par la migration d'une ou plusieurs planètes géantes qui sont aller percurter un vaste réservoir de petits corps à la périphérie du système solaire. Cette intrusion l'aurait fait littéralement volet en éclats, envoyant valser des projectiles jusque dans le système solaire interne, où se trouvaient la Terre et la Lune. Ce qui implique que les géantes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune aient été beaucoup plus proches du soleil qu'elles ne le sont aujourd'hui: dix millions d'années après sa naissance, le système primitif était carrément deux fois moins étendu qu'il ne l'est aujourd'hui. Et il se terminait donc par une épaisse ceinture de «planétésimaux», autrement dit des petits corps de quelques mètres à quelques centaines de kilomètres de diamètre, trop éloignés de l'influence gravitationnelle du Soleil pour avoir pu se regrouper et former de véritables planètes. Une sorte de réservoir de grosses pierres semblable à la ceinture de Kuiper qui se trouve aujourd'hui au-delà de Neptune, mais bien plus fourni, et bien plus proche: il s'arrêtait à peu près à 30 unités astronomiques du Soleil, là où se trouve Neptune actuellement. Ce qui implique que les planètes géantes se soient donc formées bien plus près du Soleil qu'on ne l'imaginait. Une hypothèse qui a le mérite d'aller dans le sens des théoies de formation des planètes gazeuses, selon lesquelles Uranus et Neptune n'ont pu se former sur leurs orbites actuelles.

UNE MIGRATION BRUSQUE.

En effet, trop éloignées du Soleil, elles n'auraient pas eu le temps de constituer un noyau solide suffisamment massif pour retenir le gaz de la nébuleuse solaire primitive avant que celuici ne se dissipe, c'est-à-dire avant dix millions d'années. A l'origine les trajectoires des planètes géantes devaient être circulaires, et non elliptiques comme aujourd'hui, pour qu'elles puissent rester stables sur leurs orbites pendant plus de 600 millions d'années. Voilà qui colle encore une fois bien mieux avec les modèles de la formation planétaire, selon lesquels les planètes devraient logiquement se former sur les orbites les plus simples, autrement dit circulaires. Encore fallait-il expliquer par quel mécanisme elles avaient acquis leur «excentricité», autrement dit leur orbite elliptique. et surtout, pourquoi certaines d'entre elles, probablement Uranus ou Neptune, avaient migré brutalement après 700 millions d'années jusque dans le disque de planétisimaux pour y semer le chaos ...



PERTUBANTE RESONANCE.

A un moment donné, deux planètes ont dû se retrouver en «résonance», un phénomène physique qui peut se révéler extrêmement destructeur. Dans le cas des planètes, ce serait une résonance entre leurs périodes orbitales qui pouraaient avoir eu des effets dévastateurs. Lors de simulations, on se rend compte que lorsque Saturne faisait exacteent un tour du Soleil pendant que Jupiter en faisait deux, autrement dit lorsqu'elles étaient en résonance 2:1, les perturbations gravitationnelles sans conséquence qu'exercent normalement entre elles les deux planètes s'ajoutaient jusqu'à tordre leurs orbites et les rendre ... elliptiques. Et cela en 100 000 ans seulement. Une configuration qui eprturbe fortement à leur tour Neptune et Uranus dont les trajectoires s'écartent alors viollement. Quelques millions d'années plus tard, elles pénètrent dans le disque des planétisimaux, déclechant le grand bombardement qui allait avoir lieu pendant plusieurs dizaines de millions d'années, avant de se stabiliser sur les orbites qu'on leur connait aujourd'hui. Dans 50 % des simulations, l'effet sur Neptune et Uranus a été si violent que les deux planètes ont inversé leurs places. Ce qui signifie qu'au tout début du système soalire, Neptune n'était peut-être pas la quatrième et dernière planèt gazeuse, mais la troisième ! Et c'est Uranus qui clôturait le ballet des planètes géantes ! De quoi expliquer peut-être pourquoi Neptune est légèrement plus massive qu'Uranus ...

Étude énergétique du système solide-ressort horizontal

Le solide S, de centre d'inertie G, oscille sous l'action du ressort sur une surface horizontale parfaitement lisse. Sa position est déterminée par l'abscisse x de son centre d'inertie et sa vitesse est $v_G = \dot{x}$ (fig. 11).
L'équation différentielle du mouvement de G a été établie au chapitre 13 :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\dot{x}$ (vitesse de G) :

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Nous allons prendre l'expression générale de la primitive de chacun des deux membres de cette équation. Calculons :

- la dérivée de l'énergie cinétique E_c du solide S :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 ; \quad \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}m \times 2\dot{x} \times \ddot{x} = m\dot{x}\ddot{x}.$$

Puisque la dérivée de E_c est $m\dot{x}\ddot{x}$, la primitive de $m\dot{x}\ddot{x}$ est E_c + cte.

- la dérivée de l'énergie potentielle élastique $E_{pél}$ du ressort :

$$E_{pél} = \frac{1}{2}kx^2 ; \quad \frac{dE_{pél}}{dt} = \frac{1}{2}k \times 2x \times \dot{x} = kx\dot{x}.$$

Puisque la dérivée de $E_{pél}$ est $kx\dot{x}$, la primitive de $kx\dot{x}$ est $E_{pél}$ + cte ;

- la primitive du second membre : celui-ci est nul, sa primitive est donc une constante.

Prenons la primitive des deux membres :

$$E_c + \text{cte} + E_{pél} + \text{cte} = \text{cte}$$

$$\mathbf{E_c + E_{pél} = cte}$$

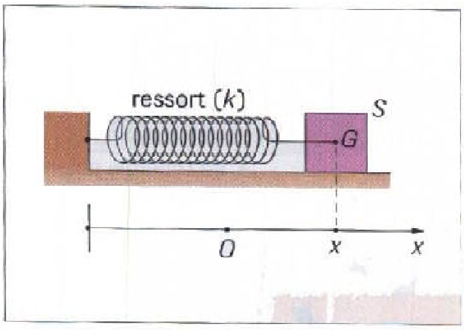
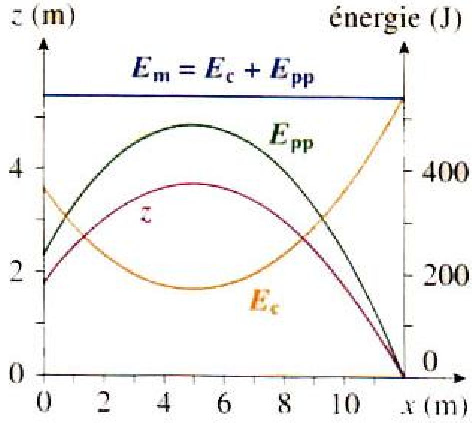


FIG. 11 Le solide S (masse m) oscille à l'extrémité du ressort de constante de raideur k.



Énergie mécanique

La somme $E_m = E_c + E_{pél}$ est l'**énergie mécanique** du système solide-ressort.

- **L'énergie mécanique du système solide-ressort est la somme de l'énergie cinétique du solide et de l'énergie potentielle élastique du ressort.**
- **L'énergie mécanique du système solide-ressort se conserve si le système évolue sans frottement :**

$$\mathbf{E_m = E_c + E_{pél} = cte}$$

Conversions d'énergie

- Puisque la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique est constante, l'énergie cinétique de la masse se transforme en énergie potentielle élastique du ressort et vice versa (fig. 12).

position	énergie cinétique	énergie potentielle élastique	énergie mécanique
1. abscisse maximale	0	$\frac{1}{2}kX_m^2$	$\frac{1}{2}kX_m^2$
2. passage à la position d'équilibre	$\frac{1}{2}mv_m^2$	0	$\frac{1}{2}mv_m^2$
3. abscisse minimale	0	$\frac{1}{2}kX_m^2$	$\frac{1}{2}kX_m^2$
4. abscisse x quelconque	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

FIG. 12 Le tableau indique la valeur des deux formes d'énergie dans des positions particulières.
Pour les positions 1 et 3, la vitesse du solide s'annule et l'énergie est toute entière sous forme d'énergie potentielle élastique. Pour la position 2, l'allongement est nul et l'énergie est toute entière sous forme d'énergie cinétique ($v = v_m$ est alors la vitesse maximale).