

CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT

1. FORCES EXERCEES PAR UN FLUIDE SUR UN SOLIDE EN MOUVEMENT.

1.1. LA POUSSEE D'ARCHIMEDE.

Problème à résoudre.

Dans l'eau, un objet nous paraît moins lourd que dans l'air. Une force se soustrait donc au poids de l'objet: on l'appelle poussée d'Archimède.

Réponse.

C'est parce qu'une force, exercée par l'eau, vient s'opposer à l'action du poids de l'objet. Cette force est la poussée d'Archimède. Elle se manifeste sur Terre sur tout objet immergé dans un milieu dit fluide comme l'eau. C'est grâce à cette poussée qu'un bateau peut flotter par exemple.

On peut dire, dans un langage imagé, que la valeur de la poussée d'Archimède est égale au poids du fluide que l'objet a remplacé lorsqu'il a été immergé. Elle dépend donc du lieu et de la masse du fluide remplacé par l'objet.

Remarque.

L'air est également un fluide et exerce aussi une poussée d'Archimède sur tous les objets. Mais la poussée d'Archimède dans l'air est 755 fois plus faible que la poussée d'Archimède dans l'eau. Elle passe donc inaperçue et est ainsi souvent négligée dans de nombreux problèmes. Cependant, son rôle est essentiel pour les dirigeables gonflés, gaz dont la densité est inférieure à celle de l'air.

La poussée d'Archimède peut être modélisée par un vecteur force:

le point d'application est le centre de gravité G_f du fluide déplacé, appelé centre de poussée.

la direction est verticale

le sens est vers le haut.

l'intensité est égale à celle du poids du volume de fluide déplacé. On aura:

$$F_{\text{Archimède}} = m_{\text{fluide déplacé}} \times g = \rho_{\text{fluide déplacé}} \times V_{\text{fluide déplacé}} \times g$$

Remarque.

La poussée d'Archimède n'est pas toujours prépondérante par rapport au poids du corps. Ainsi, malgré la poussée d'Archimède, une bille d'acier coule dans l'eau. **Seuls les corps dont la densité est inférieure à celle de l'eau flottent sur l'eau.**

La poussée d'Archimède a les mêmes caractéristiques si le solide est en mouvement ou immobile par rapport au fluide.

Si le solide flotte sur un liquide, il subit la poussée d'Archimède exercée par le liquide et celle qui est exercée par l'air qui se trouve au-dessus. Mais on néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air par rapport à celle exercée par l'eau.

1.2. LA FORCE DE FROTTEMENT EXERCEE PAR LE FLUIDE.

Un skieur, une voiture en mouvement dans l'air, un nageur en mouvement dans l'eau subissent des actions mécaniques de contact qui ont tendance à freiner leur mouvement. Ces actions mécaniques peuvent être modélisées par une seule force appelée force de frottement.

De façon générale, si un solide a un mouvement par rapport à un fluide, il subit une force de frottement f .

Dans le cas particulier d'un solide en chute verticale dans un fluide, la force de frottement f a les caractéristiques suivantes:

le point d'application la force s'exerce sur toute la surface du solide mais on se ramène au barycentre de la surface.

la direction est colinéaire au vecteur vitesse v du solide

le sens est dans le sens contraire du vecteur vitesse v du solide.

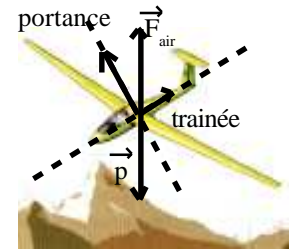
l'intensité dépend de la vitesse du solide, de la nature du liquide, de la forme, des dimensions et de l'état de surface du solide.

On peut montrer que la valeur de la force de frottement est proportionnelle à v^n ; la valeur de n dépend de différents paramètres, en particulier de la valeur de la vitesse.

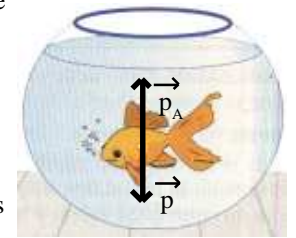
- **Pour un solide en mouvement dans un liquide, dont la vitesse ne dépasse pas quelques $cm.s^{-1}$** , la valeur de la force de frottement est de la forme $f = k.v$.

Dans le cas d'une sphère de rayon r tombant dans un fluide, le coefficient k est donné par la relation $k = 6.\pi.\eta.r$ avec η la viscosité du fluide.

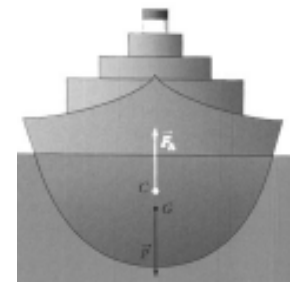
- **Pour un solide en mouvement dans l'air dont la vitesse est de quelques $m.s^{-1}$** , la valeur de la force de frottement est de la forme $f = k'.v^2$.
- Le coefficient de frottement k' s'écrit $k' = \frac{1}{2} \rho_0 C_x S$ avec
- ρ_0 la masse volumique du fluide
 - S l'aire de la grande section du solide \perp au déplacement
 - C_x le coefficient de pénétration dans le fluide.



C'est l'action exercée par l'air qui compense le poids et permet au planeur de se maintenir en vol.



Le poisson, lorsqu'il est immobile, n'est soumis qu'à son poids et à la poussée d'Archimède.



Remarque.

Dans le paragraphe 2, nous avons étudié la chute libre d'une balle dans l'air. Or l'air fait partie de la famille des fluides; il faudrait donc, en toute rigueur, tenir compte des forces exercées par le fluide air sur la balle.

Bien que la chute s'effectue dans un fluide, on peut se rapprocher de cette situation idéale si les forces exercées par ce fluide sur le solide (poussée d'Archimède et force de frottement) sont négligeables devant la force de pesanteur. Pour cela:

- il faut que la masse volumique du solide soit grande devant celle du fluide;
- il faut aussi que la vitesse du solide, sa forme, ses dimensions, sa surface soient telles que la force de frottement soit la plus faible possible.

En pratique, ces conditions sont réalisées lorsqu'un solide dense et de forme aérodynamique chute dans l'air, sur une hauteur ne dépassant pas quelques mètres.

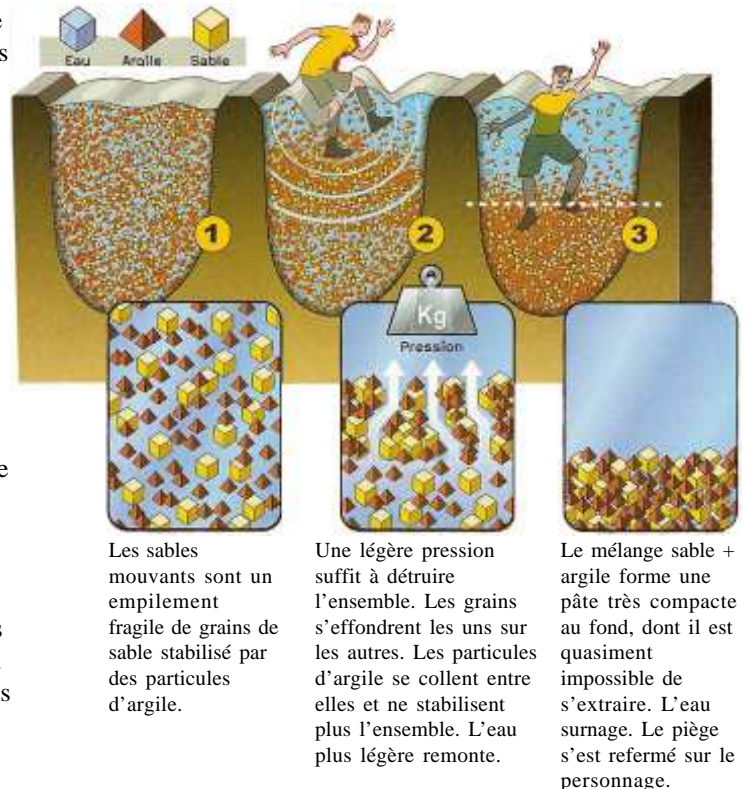
Mais dans certains fluides, il n'est pas possible de faire abstraction de la poussée d'Archimède et des forces de frottement du fluide. C'est l'objet de la suite du cours et du Tp Φ 12.

LA POUSSEE D'ARCHIMEDE ET LES SABLES MOUVANTS.

Une équipe de chercheurs hollandais vient de démontrer qu'on ne peut pas être englouti par des sables mouvants. Ces fameux sables sont un mélange de sable et d'argile gorgée d'eau. Les grains de sable sont agglomérés par l'argile humide, qui agit comme un ciment très léger. Cette argile forme une sorte de gel mi-solide mi-liquide, qui a plus ou moins la consistance d'un yaourt. De fait, un être humain qui pénètre dans la zone de sables mouvants, exerce une pression sur le sable. Cette force suffit à briser l'empilement fragile des grains stabilisés par l'argile. Et tout s'effondre comme un château de cartes. Au sein de l'argile, plusieurs forces de nature électrique s'affrontent. Certaines sont répulsives, d'autres attractives. Tant que personne n'a mis le pied sur la sable, les forces répulsives l'emportent. Les sables mouvants sont "aérés": il existe beaucoup d'espace entre les particules de sable. Mais la pression exercée par le pied chamboule tout. Le fragile empilement est écrasé au sommet, et c'est une réaction en chaîne qui s'amorce. Les forces attractives dans l'argile l'emportent, les particules d'argile se collent entre elles et n'assurent plus leur rôle de liant. Les grains, qui ne sont plus tenus, s'effondrent étage après étage et se tassent au fond, tandis que l'eau, plus légère que le sable et l'argile, surnage. Le marcheur a l'impression que tout se liquéfie autour de lui. Et plus il bouge, plus cela devient liquide. Il commence à s'enfoncer. Jusqu'aux genoux. Jusqu'à la taille.

Et c'est tout ! Impossible qu'il soit totalement englouti. Il est sauvé par la poussée d'Archimède. Tout corps plongé dans un fluide reçoit de sa part une poussée verticale, dirigée vers le haut, dont la valeur est égale au poids du fluide déplacé. Ici, le fluide, c'est le mélange eau, argile et sable. Sa densité est deux fois plus élevée que celle de notre corps. Autrement dit, lorsque l'homme s'enfonce dans les sables mouvants, il subit une poussée vers le haut qui devient égale à son poids. Et il flotte ! Cela se produit lorsqu'environ la moitié de notre corps, au pire les deux tiers selon la densité des sables, a sombré.

Par contre, une fois pris au piège, il est extrêmement difficile d'en sortir seul. Un homme enfoncé jusqu'à la taille qui essaierait de lever un pied devrait réaliser le même effort que pour soulever une voiture de une tonne !



2. CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT.

2.1. COMMENT L'AIR OU L'EAU RALENTISSENT-ILS LA CHUTE D'UN CORPS ?

Christian Huygens, dans son *Discours de la cause de la pesanteur*, écrit ceci en 1690.

“J’ai vu avec plaisir ce que Mr Newton écrit touchant les chutes et les jets des corps pesants dans l’air, ou dans quelque autre milieu qui résiste au mouvement, m’étant appliqué à la même recherche.

...

J’examinerai premièrement ces mouvements en supposant que les forces de la résistance sont comme les vitesses des corps, ce qui, alors, me paraissait fort vraisemblable; Mais ayant obtenu ce que je cherchais, j’appriis presque en même temps, par les expériences que nous fîmes à Paris dans l’Académie des Sciences, que la résistance de l’air et de l’eau était comme les carrés des vitesses. Et la raison est assez aisée à concevoir; parce qu’un corps, allant par exemple avec double vitesse, est rencontré par deux fois autant de particules de l’air ou de l’eau, et avec double célérité. Ainsi je vis ma nouvelle théorie renversée, ou du moins inutile.

...

Pour expliquer ce qui est des chutes des corps, je répète ici premièrement ce que j’ai écrit à la fin du traité du Centre d’Agitation: à savoir qu’un corps, en tombant à travers l’air, augmente continuellement sa vitesse, mais toutefois en sorte qu’il n’en peut jamais excéder, ni même atteindre, un certain degré, qui est la vitesse qu’il faudrait à l’air à souffler de bas en haut, pour tenir le corps suspendu sans pouvoir descendre; car alors, la force de l’air contre ce corps égale sa pesanteur. J’appelle cette vitesse, dans chaque corps, la vitesse Terminale”.

2.2. CAS DE LA FORCE DE FROTTEMENT FLUIDE DE LA FORME $f = k.v$ (Voir Tp Φ 12)

2.3. CAS DE LA FORCE DE FROTTEMENT FLUIDE DE LA FORME $f = k.v^2$

Nous allons nous placer dans le cas où la vitesse est plus élevée. De sorte que l’on peut modéliser la force de frottement par l’expression: $f = k.v^2$

On peut donc reporter cette expression de la force de frottement dans l’expression (3) de l’accélération à n’importe quel instant t:

$$a = a_0 - \frac{f}{m} = a_0 - \frac{k v^2}{m} \quad \text{or } a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ce qui nous donne} \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{k}{m} v^2 + a_0$$

Ce qui est l’expression d’une équation différentielle du 1^{er} ordre en v

Cette seconde modélisation s’applique bien lorsque les vitesses sont élevées, mais elle n’amène pas à une solution simple de l’équation différentielle.

Plusieurs méthodes de calcul approchées permettent d’obtenir v(t), la plus simple étant la méthode d’Euler.

L’équation différentielle (4) permet de définir une vitesse limite v_{Limite} atteinte si la durée de chute du solide est suffisamment longue,

lorsque $\frac{dv}{dt} = 0$, ce qui donne $v_{\text{Limite}}^2 = \frac{m a_0}{k}$ soit $v_{\text{Limite}} = \sqrt{\frac{m.g}{k} \times \left[1 - \frac{\rho_{\text{Fluide}}}{\rho} \right]}$

Remarque.

La vitesse limite est théoriquement atteinte au bout d’une durée de chute infinie, cependant, l’expérience montre qu’au bout d’une durée plus ou moins longue le mouvement est pratiquement uniforme.

2.4. LA METHODE D'EULER.

Plutôt que de rechercher l'expression mathématique de la fonction $v = f(t)$ on se propose de résoudre numériquement l'équation différentielle, c'est-à-dire d'utiliser une méthode qui consiste à obtenir les valeurs approchées de cette fonction et d'en déduire la représentation graphique. Cette méthode la plus simple est la méthode d'Euler.

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{k}{m} v^2 + a_0 \quad \text{de la forme} \quad \frac{dv}{dt} = \alpha v^2 + a_0 \quad \text{avec} \quad \alpha = - \frac{k}{m} \quad a_0 = 1 - \frac{\rho_{\text{Fluide}}}{\rho} g \quad (2)$$

A condition de choisir δt suffisamment petit, on peut écrire qu'on a pratiquement $\frac{\delta v}{\delta t} = \alpha v^2 + a_0$

δv est la variation de la valeur v de la vitesse pendant la durée δt .

Si on connaît les valeurs de α et a_0 et les conditions initiales, on peut trouver de proche en proche les différentes valeurs de v au cours du temps:

- Or à l'instant initiale, on connaît la vitesse initiale $v = v_0$.
- On choisit alors une valeur δt assez petite (c'est le pas du calcul).
- A la date $t_1 = t_0 + \delta t$ la vitesse est alors devenue: $v_1 = v_0 + \delta v_0 = v_0 + (\alpha v_0^2 + a_0) \delta t$
- On constate que cette nouvelle valeur v_1 de la vitesse est calculable puisque v_0 , α , a_0 et δt ont des valeurs connues.
- On utilise la même méthode pour calculer la vitesse v_2 : $v_2 = v_1 + \delta v_1 = v_1 + (\alpha v_1^2 + a_1) \delta t$...

En répétant un calcul, on pourra connaître les valeurs de la vitesse aux différentes dates de δt et on pourra ainsi en obtenir la représentation graphique de v en fonction du temps.

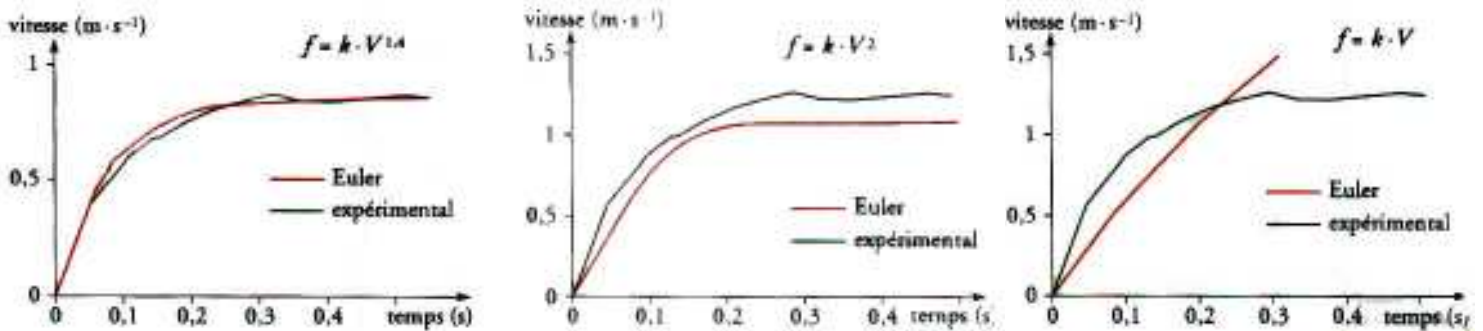
L'équation différentielle a été résolue numériquement en répétant un calcul: c'est une méthode itérative.

Remarque.

La courbe numérique obtenue par la méthode d'Euler concorde avec la courbe expérimentale si le pas d'itération est bien choisi.

Par ailleurs même si on peut améliorer la précision des calculs en choisissant un pas δt de plus en plus petit, on s'impose alors un plus grand nombre de calculs difficilement gérables, sans l'utilisation d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

On arrive à des résultats plus ou moins en accord avec les relevés expérimentaux. C'est le modèle de la force en $v^{1,4}$ qui correspond le mieux aux résultats de l'expérience.



4.5. POUR CONCLURE.

Pour résoudre une équation différentielle dont la solution n'est pas évidente, on peut résoudre cette équation différentielle numériquement, c'est-à-dire d'utiliser une méthode qui consiste à obtenir les valeurs approchées de cette fonction et d'en déduire la représentation graphique.

Au cours d'une chute verticale avec frottement, le mouvement du centre d'inertie G du solide peut se décomposer en deux phases:

- le régime initial ou transitoire, pendant lequel v_G varie. Durant cette phase, la valeur f de la force de frottement fluide augmente;
- le régime asymptotique ou permanent, pendant lequel v_G est égale à la vitesse constante v_{Lim} . Durant cette phase, la valeur f de la force de frottement fluide est constante.

Aucun des deux modèles de la force de frottement (en $k \cdot v$ ou $k \cdot v^2$) n'est tout à fait correct sur la totalité de la chute de la bille.

- De manière générale, le modèle de la force de frottement en $k \cdot v$ est toujours meilleur au début de la chute;
- Le modèle de la force de frottement en $k \cdot v^2$ est meilleur en fin de chute si la vitesse du solide augmente suffisamment.