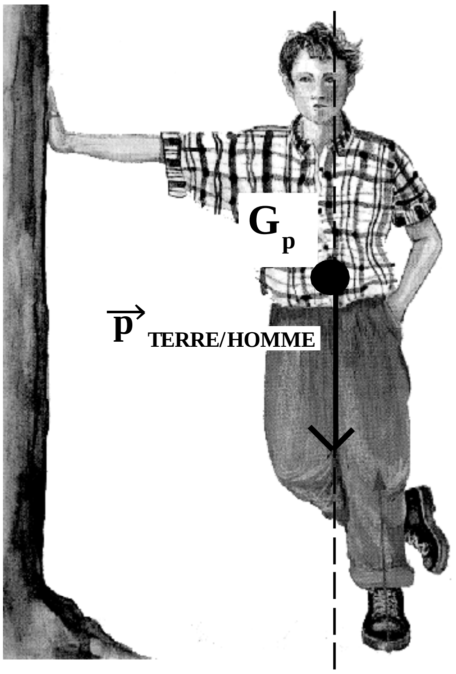
PROJECTILE DANS UN CHAMP DE PESANTEUR

1. FORCE EXERCEE PAR LA TERRE SUR UN SOLIDE EN MOUVEMENT.

1.1. LA FORCE DE PESANTEUR.

Un objet qui se trouve au voisinage de la Terre subit une force gravitationnelle $\vec{F}$ qui peut s'identifier à la force de pesanteur $\vec{P}$
Le poids, action répartie dans tout le volume d'un objet, peut être représenté par une force, notée p, dont:



le point d'application est appelé centre de gravité.

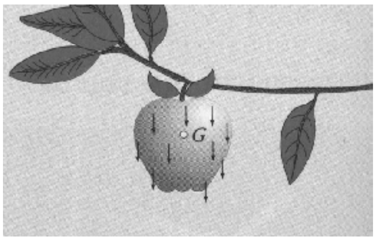
la direction est *rigoureusement:* suivant la droite qui relie les deux centres G_p et G_T
en exercice: verticalement

le sens est *rigoureusement:* vers le centre de la Terre.
en exercice: vers le bas

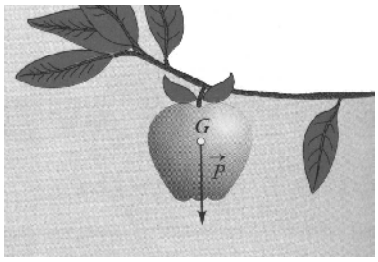
l'intensité se nomme p et s'exprime en Newton (N).

$$p = m \times g$$

avec g l'intensité de la pesanteur; elle s'exprime en N / Kg.
Cette constante varie selon l'endroit où on se trouve.
En France g est de l'ordre de 10 N / Kg.



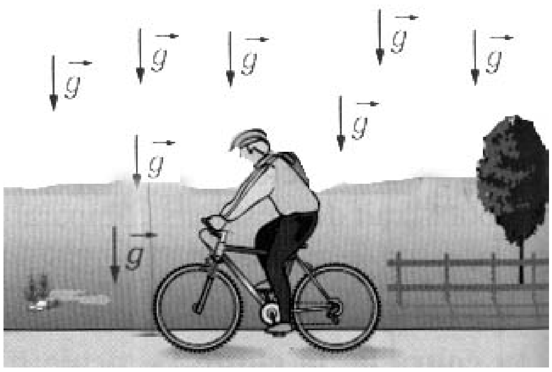
L'attraction gravitationnelle de la Terre s'exerce sur chaque particule d'un coprs placé en son voisinage. L'ensemble des actions exercées par la Terre sur la pomme est équivalente à une force unique.



1.2. LE CHAMP DE PESANTEUR EST UNIFORME.

La relation **p = m x g** est supposée vraie partout.

En réalité g dépend du lieu, m ne change pas. Donc p dépend du lieu. C'est la faible variation de la valeur de g à la surface de la Terre qui crée la confusion entre masse et poids.



Ainsi:
- Il faut s'écarter de 111 km pour que l'angle de deux verticales atteigne un degré;
- D'autre part, il faut s'élever en altitude de 30 km pour que l'intensité de la pesanteur diffère de 1% de sa valeur au sol.

Ainsi, nous pouvons considérer que dans un domaine où les dimensions n'excèdent pas quelques kilomètres, le champ de pesanteur est identique en direction, sens et intensité: on dit que le champ de pesanteur est uniforme. Dans une telle région le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ est constant.

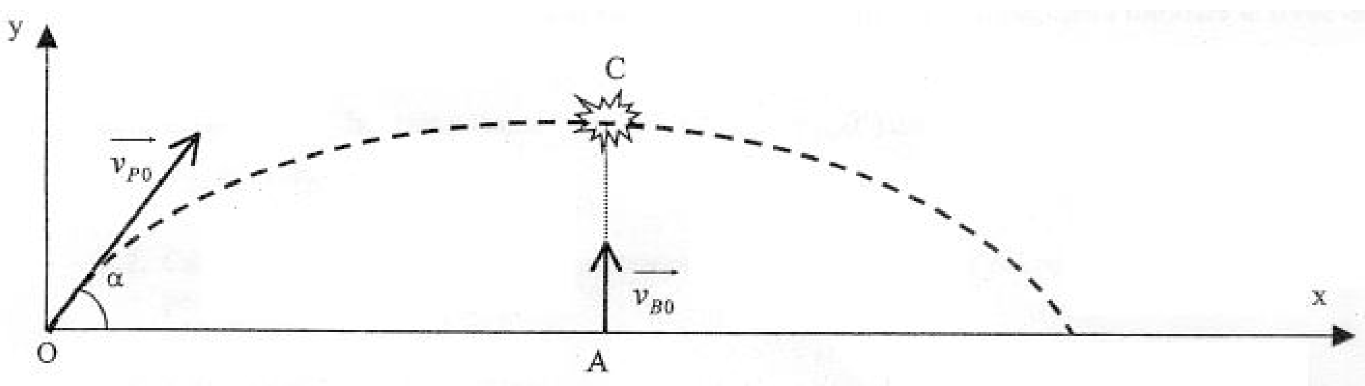
Lorsque le champ de pesanteur est uniforme, son vecteur est porté par des verticales parallèles: ce sont des lignes du champ de pesanteur qui sont orientées de haut en bas comme le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

Remarque.
Ce champ existe en un point au voisinage de la Terre qu'il y ait ou non un objet de masse m placé en ce point au voisinage de la Terre. Cet objet ne sert qu'à détecter le champ qui est crée par la Terre.

2. CHUTE PARABOLIQUE SANS FROTTEMENT.

On étudie le mouvement d'un pigeon d'argile lancé pour servir de cible à un tireur de ball-trap.

Le pigeon d'argile de masse m_P = 0,10 kg assimilé à un point matériel M est lancé avec un vecteur vitesse v_0 de valeur v_0 = 30 m/s, faisant un angle α de 45° par rapport à l'horizontale. Le participant situé en A tire verticalement une balle de masse m_B = 0,020 kg avec un fusil. La vitesse initiale de la balle est v_{B0} = 500 m.s^{-1}, la balle, assimilée à un point matériel B, part du point A tel que OA = 45 m (Les vecteurs vitesse ne sont pas à l'échelle sur le schéma).



Dans cette étude la vitesse atteinte par la balle étant faible, on considère comme négligeables les frottements de l'air dans tout l'execcice. A l'aide de la deuxième loi de Newton, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on peut établir les équations horaires du mouvement de la balle ainsi que l'équation de sa trajectoire dans le repère (O, x, y).

2.1. L'EXPRESSION DU VECTEUR ACCELERATION A PARTIR DU BILAN DES FORCES.

Le mouvement de ce projectile est étudié dans un domaine de l'espace où le champ de pesanteur est considéré comme uniforme (ce n'est pas le cas pour un satellite !!).

Nous allons négliger les frottements dus à l'air et la poussée d'Archimède.

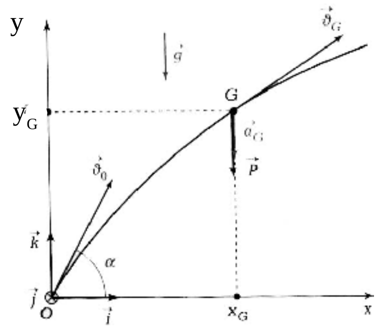
On étudie le système projectile dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Inventaire des forces appliquées au système.

Le poids $\vec{p}$	Point d'application: G Direction: Verticale Sens: vers le centre de la Terre Valeur: p = m x g

On peut appliquer la seconde loi de Newton, qui établit une relation vectorielle dans le cas d'un mouvement de translation rectiligne non uniforme:

mtr varié $\Longrightarrow$ **Selon la seconde loi de Newton** $\Longrightarrow$ $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$



On a donc la relation $\vec{p} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un solide en chute libre est égal au vecteur champ de pesanteur g.
La valeur de l'accélération est indépendante de la masse.

2.2. LES COMPOSANTES DU VECTEUR ACCELERATION DANS LE PLAN (O, x, y).

On projette cette relation sur les trois axes en tenant compte des grandeurs algébriques:

$$\vec{a}\ \left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array}\right.$$

2.3. LES COMPOSANTES DU VECTEUR VITESSE DANS LE PLAN (O, x, y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix} \longrightarrow \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_{x0} = V_0.\cos\alpha \\ v_y = -g.t + v_{z0} = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

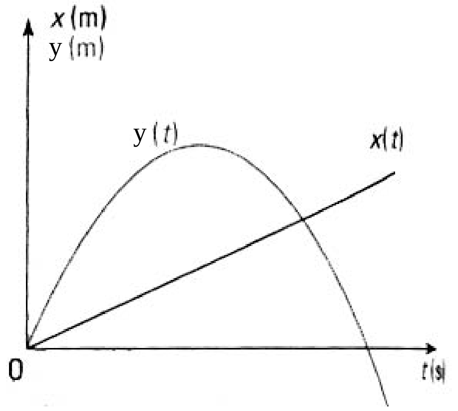
2.4. LES COMPOSANTES DU VECTEUR POSITION DANS LE PLAN (O, x, y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = V_0.\cos\alpha \\ v_y = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{vmatrix} \longrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = V_0.t.\cos\alpha + x_0 = V_0.t.\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.t.\sin\alpha + z_0 = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.t.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Les équations horaires montrent:

- Selon l'axe Oz, le mouvement est celui d'une chute libre verticale de vitesse initiale de valeur $v_0\sin\alpha$;
- Selon l'axe Oy, puisque y = 0 à tout instant du mouvement, le mouvement du projectile s'effectue dans le plan (xOz), qui contient le vecteur vitesse initial v_0;
- Selon l'axe Ox, puisque la composante v_x du vecteur vitesse selon l'axe Ox est indépendante du temps, donc constante au cours du mouvement, le mouvement sur l'axe Ox est donc uniforme;
- Puisque la composante a_z de l'accélération est constante, le mouvement sur l'axe Oz est uniformément varié.

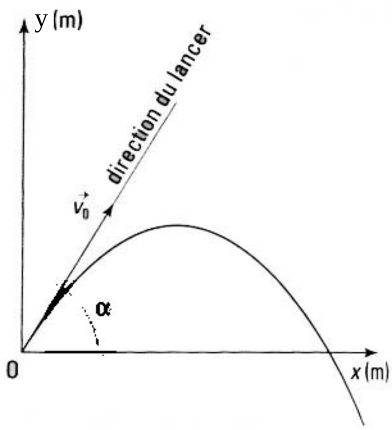


2.5. EQUATION DE LA TRAJECTOIRE.

Pour trouver l'équation de la trajectoire du centre d'inertie d'un projectile, il suffit de remplacer le paramètre temps dans l'expression de z par:

$$t = \frac{x}{V_0.\cos\alpha} \quad \text{ce qui donne} \quad y = -\frac{1}{2}\, g \left[\frac{x}{V_0.\cos\alpha}\right]^2 + V_0\sin\alpha\,\frac{x}{V_0.\cos\alpha}$$

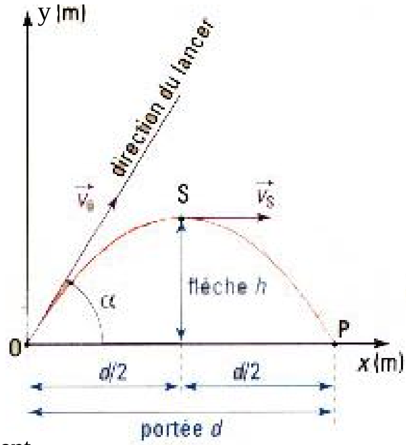
$$y = -\frac{1}{2}\, g \left[\frac{x}{V_0.\cos\alpha}\right]^2 + x\,.\tan\alpha$$



La trajectoire du centre d'inertie d'un projectile lancé avec une vitesse quelconque est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant $\vec{v_0}$.

2.6. PORTEE DE TIR.

On appelle portée de tir la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P sur le plan horizontal contenant O. Dans l'équation de la trajectoire, c'est la valeur de x différente de zéro qui annule z:



$$y_P = -\frac{1}{2}\, g \left[\frac{x}{V_0.\cos\alpha}\right]^2 + x_P \,.\, \tan\alpha = 0$$

on en déduit $$OP = x_P = \frac{2.v_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$

La portée est maximale si $\sin 2\alpha = 1$ ou si $\alpha = 45°$

2.7. LA FLECHE DE LA TRAJECTOIRE.

La flèche de la trajectoire est l'altitude maximale atteinte par le point G par rapport au point de lancement.

Au sommet de la parabole, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire donc horizontal. Par conséquent la composante v_{Sy} est nulle.

$v_y = -g.t + V_0.\sin\alpha = 0$ on en déduit l'instant t_S, date de passage du projectile au sommet S: $t_S = \dfrac{V_0.\sin\alpha}{g}$

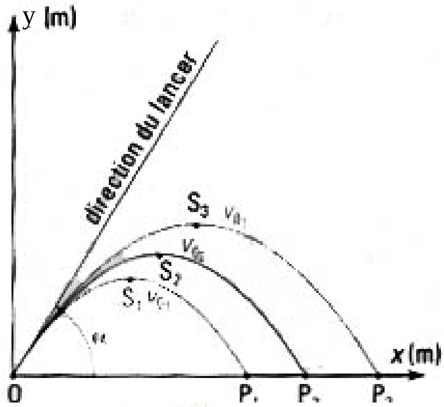
On remplace ensuite t par cette expression dans les équations paramétriques de position pour déterminer les coordonnées de S:

$$OS \left| \begin{array}{l} x_S = v_0.t_S.\cos\alpha = v_0.\dfrac{v_0.\sin\alpha}{g}.\cos\alpha = \dfrac{v_0^2.\sin 2\alpha}{2g} \\[2ex] y_S = -\dfrac{1}{2} g.t_S^2 + V_0.t_S.\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{v_0^2.\sin^2\alpha}{g} \end{array} \right.$$

Remarque. A noter que $x_P = 2\,.\,x_S$, de sorte que l'on retrouve une propriété de construction de la parabole, à savoir que la droite verticale passant par le sommet S est un axe de symétrie de la parabole.

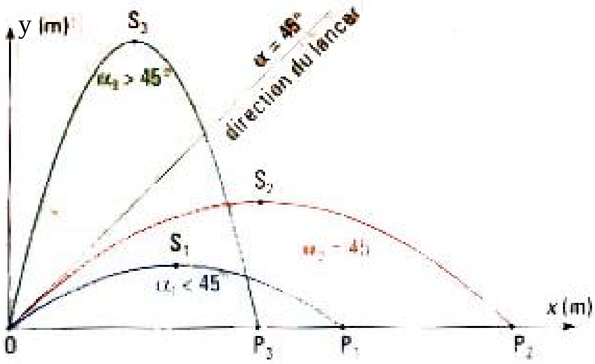
2.8. INFLUENCE DE LA VALEUR DE LA VITESSE INITIALE.

A α donné (0° < α < 90)), on fait varier la valeur v_0 de la vitesse initiale. La flèche h et la portée d sont proportionnelles à v_0^2: plus la valeur v_0 de la vitesse initiale est grande, et donc plus le projectile s'élève et parcourt une distance importante.
La vitesse initiale communiquée au projectile résulte d'un transfert d'énergie sous forme d'énergie cinétique (bras d'un lanceur, système de projection d'une machine...), il faut aussi, pour aller plus loin ou plus haut, ajuster l'angle de tir.



2.9. INFLUENCE DE L'ANGLE DE TIR.

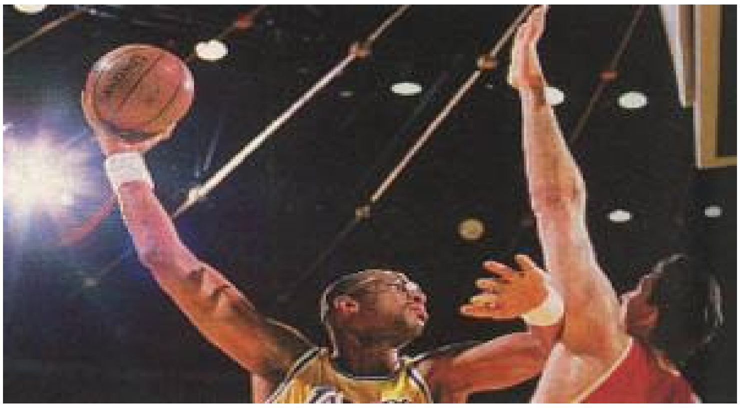
- A v_0 donné, on fait varier la valeur de l'angle de tir α entre 0° et 90°. D'après les expressions respectives, la flèche h est proportionnelle à $\sin^2\alpha$ et la portée d est proportionnelle à $\sin(2\alpha)$:
  - Lorsque α croît de 0° à 45°, la flèche et la portée d augmentent;
  - Pour α = 45°, la portée d est amximale ($\sin(2\alpha) = 1$). C'est cette valeur que les lanceurs de poids, de marteau ou de javelot, recherchent pour donner à leurs jets une efficacité optimale;
  - Lorsque α croît de 45° à 90°, la flèche h continue à augmenter, alors que la portée diminue.

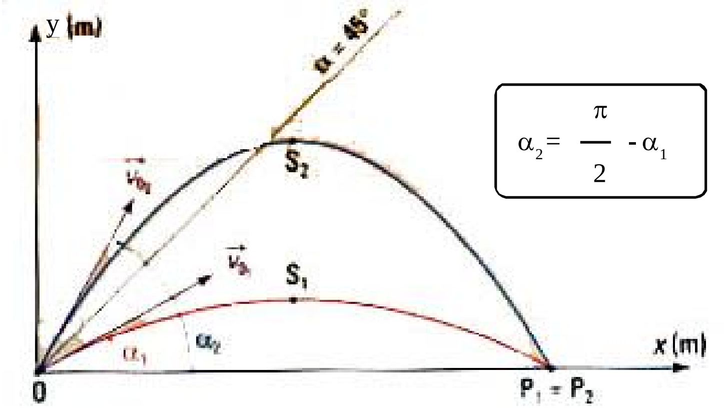


La flèche est maximale et la portée est nulle pour α = 90°: on retrouve alors le cas particulier de la chute libre verticale.

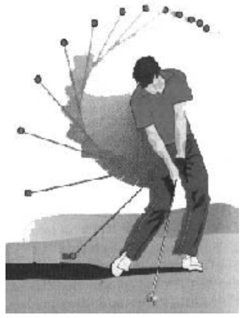
- A une valeur v_0 de la vitesse initiale donnée, deux projectiles lancés respectivement avec les angles de tir α_1 et α_2 complémentaires ont la même portée, mais des flèches différentes. Cette propriété est couramment utilisée par des joueurs de basket qui "lobent" un adversaire, ou de façon moins plaisante, par les artilleurs qui bombardent une position en éviatant des obstacles de faibles hauteurs.

Remarque Si $\alpha_1 < \alpha_2$, le premier tir est tendu et le second est en cloche.





2.10. REMARQUES.



Les résultats précédents ne sont valables que si les conditions de l'étude sont respectées (chute libre).

Dans l'air, la vitesse du projectile doit être assez faible pour qu'on puisse considérer que la force de frottement exercée par l'air est négligeable devant le poids du solide.

Ce n'est, par exemple, pas le cas si l'on étudie le mouvement d'une balle de golf qui est lancée à une vitesse v_0 de plusieurs dizaines de $m.s^{-1}$.

Dans ce cas le modèle de la chute libre n'est plus applicable: la trajectoire réelle n'est plus parabolique.

3. CHUTE VERTICALE SANS FROTTEMENT: CHUTE LIBRE.

On dit qu'un solide est en chute libre si la seule force qui s'exerce sur lui est la force de pesanteur. Cette condition n'est réalisée que dans le vide.

Cependant, pour des solides denses et pour des hauteurs de chute faibles (de l'ordre du mètre), on admettra que la chute de l'objet étudié est une chute libre.

De ce fait, les forces agissant sur le solide se ramènent à la seule force de pesanteur.

3.1. EQUATIONS PARAMETRIQUES DU MOUVEMENT DE LA BALLE DE FUSIL.

Le mouvement de ce projectile est étudié dans un domaine de l'espace où le champ de pesanteur est considéré comme uniforme (ce n'est pas le cas pour un satellite !!).

Nous allons négliger les frottements dus à l'air et la poussée d'Archimède.

On étudie le système projectile dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Inventaire des forces appliquées au système.

Le poids $\vec{p}$	Point d'application:	G
	Direction:	Verticale
	Sens:	vers le centre de la Terre
	Valeur:	p = m x g

On peut appliquer la seconde loi de Newton, qui établit une relation vectorielle dans le cas d'un mouvement de translation rectiligne non uniforme:

mtr varié $\xRightarrow{\text{Selon la seconde loi de Newton}}$ $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

On a donc la relation $\vec{p} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un solide en chute libre est égal au vecteur champ de pesanteur g.
La valeur de l'accélération est indépendante de la masse.

3.2. LES COMPOSANTES DU VECTEUR ACCELERATION DANS LE PLAN (O, x, y).

On projette cette relation sur les trois axes en tenant compte des grandeurs algébriques:

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$$

3.3. LES COMPOSANTES DU VECTEUR VITESSE DANS LE PLAN (O, x, y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = - g \end{array}\right. \longrightarrow \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_{x0} = 0 \\ v_y = - g.t + v_{z0} = - g.t + V_{B0} \end{array}\right.$$

3.4. LES COMPOSANTES DU VECTEUR POSITION DANS LE PLAN (O, x, y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = = 0 \\ v_y = - g.t + V_{B0} \end{array}\right. \longrightarrow \vec{OM}\left|\begin{array}{l} x = x_0 = 0 \\ y = - \dfrac{1}{2}\, g.t^2 + V_{B0} + z_0 = - \dfrac{1}{2}\, g.t^2 + V_{B0} \end{array}\right.$$

<u>Si vous étiez dans un ascenseur en chute libre, le fait de sauter juste avant de vous écraser au sol vous sauverait-il ?</u>

Désolé, sauter n'évitera pas l'issue tragique de cette chute purement théorique (les ascenseurs, à part dans les films, sont équipés de systèmes de freinage de secours). Pourquoi l'atterrissage est-il si douloureux ? Parce que dans votre descente à toute berzingue, disons à 80 km/h, l'ascenseur et vous avez une énergie cinétique très importante. Quand, lors du fatal contact avec le rez-de-chaussée, votre vitesse devient subitement nulle, cette énergie cinétique ne disparaît pas (l'énergie ne disparaît pas); elle se transforme en énergie mécanique de déformation. En langage non scientifique: vous, comme l'ascenseur, vous écrabouillez. En quoi sauter pourrait-il vous aider ? En réduisant votre vitesse de descente, donc votre énergie cinétique au moment de l'impact, et finalement la déformation que devraient encaisser vos rotules. Mais voilà, aucun humain ne peut bondir à une vitesse proche de 80 km/h (tout en évitant le plafond de l'ascenseur). Les meilleurs basketteurs atteignet à peine les 8 km/h. En plus, pour vous en sortir, il vous faudrait non seulement faire des sauts de super-héros mais en plus avoir une vision aux rayons X pour savoir à quel moment produire l'effet salvateur ...