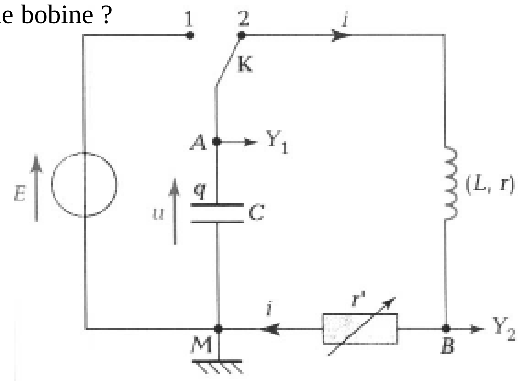
OSCILLATIONS LIBRES DANS UN CIRCUIT RLC SERIE

Que se produit-il lorsque les bornes d'un condensateur chargé sont liées à celles d'une bobine ?



1. ETUDE EXPERIMENTALE D'UN CIRCUIT OSCILLANT.

En position 1, on charge le condensateur aux bornes d'un générateur de fem E.
En basculant l'interrupteur sur la position 2, on constitue un circuit, appelé circuit RLC, comprenant trois dipôles en série: le condensateur de capacité C, la bobine d'inductance L et de résistance r, et un conducteur ohmique de résistance R'.
La résistance totale du circuit est R = r + R'.

Quand l'interrupteur passe en position 2, on constitue un circuit fermé et le condensateur se décharge dans la bobine et le conducteur ohmique.

Remarque pratique.
Il est à noter que même si on ne place pas un conducteur ohmique de résistance R' dans le circuit, il en reste pas moins que l'ensemble {bobine + condensateur constitue encore un dipôle RLC avec R = r, résistance interne de la bobine.

La valeur maximale de la tension décroît; on dit que le circuit RLC est le siège d'oscillations libres amorties.

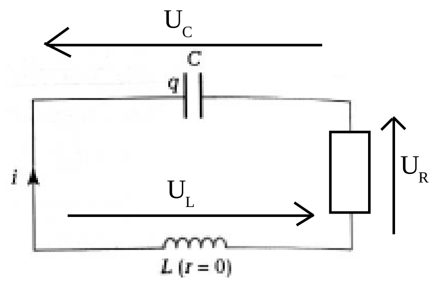
L'enregistrement montre que la tension u passe par un maximum à intervalles de temps égaux.
La valeur de ce maximum diminue au cours du temps. On dit que le régime des oscillations est pseudo-périodique.
La pseudo période T est ou bien la durée séparant, par exemple, deux maxima successifs de la tension u ou bien la durée séparant deux passages par zéro dans le même sens.
Sa valeur demeure constante lorsque le temps s'écoule.

Remarque pratique.
Il est préférable, pour déterminer la valeur d'une période, de mesurer le temps correspondant à n périodes et d'en déduire la valeur d'une période, pour avoir ainsi une valeur moins entâchée de l'erreur expérimentale.

2. ETUDE ANALYTIQUE D'UN CIRCUIT OSCILLANT.

2.1. L'EQUATION DIFFERENTIELLE D'UN CIRCUIT RLC.

On étudie le circuit comportant une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un condensateur de capacité C et une résistance de valeur R.



A tout instant, $u_C + u_R + u_L = 0$, soit $u_C + R \times i + L \dfrac{di}{dt} = 0$

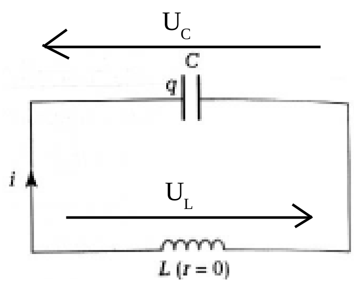
En notant $q_A(t)$ la charge de l'armature A égale à q(t), nous avons: $i = \dfrac{dq}{dt} = C\,u'_C$

Alors $\dfrac{di}{dt} = C\,u''_C$ on obtient alors: $u_C + RC\,u'_C + LC\,u''_C = 0$

ce qui donne $u''_C + \dfrac{R}{L}\,u'_C + \dfrac{1}{LC}\,u_C = 0$

Remarque.
Dans le cas d'un circuit comportant une bobine de résitance r et un conducteur ohmique de résistance r', la résistance R représente la somme des résistances du ciruit R = r + r'.

2.2. L'EQUATION DIFFERENTIELLE D'UN CIRCUIT LC.

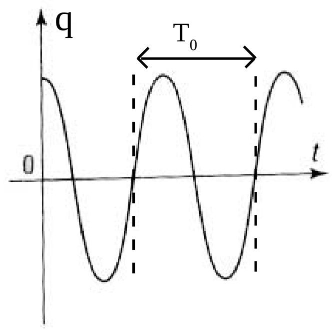


Au niveau de la terminale S, il n'est pas possible d'étudier l'équation différentielle du second degré que nous venons de trouver et qui modélise les oscillations libres électriques dans un circuit RLC série.
Mais nous pouvons étudier le cas d'oscillations électriques libres dans un circuit RLC série où la résistance R est très très petite...

Dans ce but, nous allons nous intéresser au circuit LC, le cas idéal du circuit RLC dont la résistance a une valeur totale nulle.
L'amortissement étant dû à la résisance, nous pouvons admettre que, lorsque celle-ci est nulle, l'amortissement disparaît, et les amplitudes de la charge q_m, de la tension u_m aux bornes du condensateur et de l'intensité i_m du courant restent constantes.

ce qui donne $u''_C + \dfrac{1}{LC}\,u_C = 0$

2.3. LES SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFFERENTIELLE D'UN CIRCUIT LC.



L'équation différentielle ci-dessus est une équation linéaire du second ordre.

Ce type d'équation admet pour solution générale une fonction du type $u_C(t) = A.\cos(B\ .\ t)$

On vérifie qu'une telle fonction est bien solution de l'équation différentielle. On aura alors:

$u_C'(t) = -A.B\sin(B.t)$ $\qquad$ $u_C''(t) = -A.B^2.\cos(B.t) = -B^2\, u_C(t)$

ce qui donne $\quad u''_C + \dfrac{1}{LC}\, u_C = (-B^2 + \dfrac{1}{LC})\, u_C(t) = 0 \quad$ ssi $\quad B = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Par ailleurs à t = 0, on aura $u_C(t) = A = U_{Max}$

Conclusion: La solution de l'équation différentielle est $u_C(t) = U_{Max}\cos(w_0.t)$ avec $w_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation

2.4. PERIODE PROPRE DES OSCILLATIONS ET PULSATION.

Nous avons posé $T_0 = 2\,\pi\sqrt{L.C}$. On peut vérifier que le produit $\sqrt{LC}$ est homogène à une durée.

Nous savons que le produit RC et le rapport $\dfrac{L}{R}$ ont les dimensions d'une durée

Ce qui permet d'écrire: $[LC] = [LR]\text{x}[\dfrac{C}{R}] = [RC] \text{ x } [\dfrac{L}{R}] = T \text{ x } T = T^2$ soit $[\sqrt{LC}] = T$, c'est donc bien homogène à une durée.

On pose donc T_0 comme la période propre des oscillations électriques libres d'un circuit LC, avec $T_0 = 2\,\pi\sqrt{L.C}$ en s.

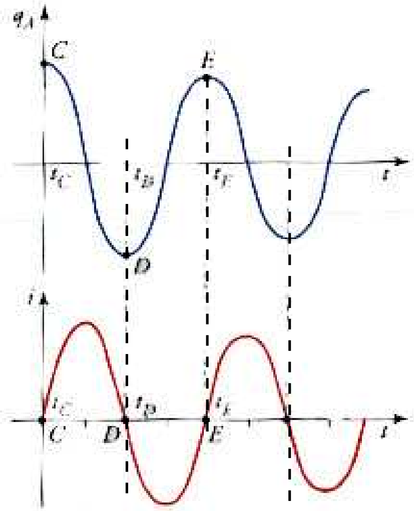
Remarque.

Dans le cas d'oscillations électriques libres dans un circuit RLC série, dans le régime pseudo-périodique peu amorti, la pseudo-période T est peu différente de la période propre T_0.

On définit la pulsation propre w_0 des oscillations électriques libres d'un circuit LC, par la relation $w_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ en $rad.s^{-1}$.

On a donc la relation qui lie pulsation et période propre: $T_0 \text{ x } w_0 = 2\,\pi$

2.5. EXPRESSION DE L'INTENSITE.



De la relation $i = \dfrac{dq}{dt}$ on en déduit $i = -U_{Max}.w_0.C\sin(w_o.t) = I_{Max}\cos(\ w_o.t + \dfrac{\pi}{2})$

3. ENERGIE D'UN CIRCUIT OSCILLANT.

Nous avons déjà abordé, dans les deux chapitres précédents:

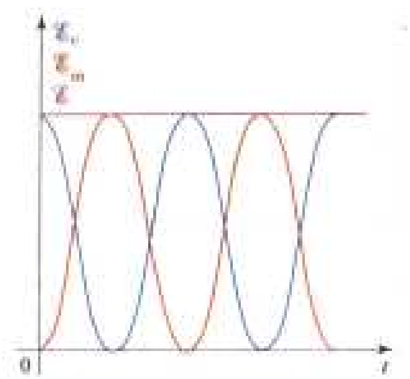
L'énergie électrique emmagasinée par un condensateur de capacité C portant la charge q sous une tension u a pour expression:

$$W_E = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\, C.u^2$$

L'énergie électrique emmagasinée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant i a pour expression:

$$W_M = \frac{1}{2}\, L.i^2$$

3.1. ENERGIE D'UN CIRCUIT LC.



L'énergie d'un circuit LC idéal, circuit oscillant non amorti, est à chaque instant la somme des énergies électrique et magnétique emmagasinées dans le condensateur d'une part et dans la bobine d'autre part:

$$W = W_E + W_M = \frac{1}{2}\, C.u^2 + \frac{1}{2}\, L.i^2$$

Avec: $u = u_m\cos(\dfrac{2\pi}{T_0} + \phi_0)$ on obtient $W_E = \dfrac{1}{2}\, C.u^2 = \dfrac{1}{2}\, C.u_m^{\,2}\cos^2(\dfrac{2\pi}{T_0} + \phi_0)$

On constate que l'énergie stockée dans le condensateur est une fonction périodique. On retrouve sur la représentation graphique les oscillations de cette énergie.

Avec: $i = - i_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right) = - w_0.C.u_{max}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right)$ on obtient $W_M = \frac{1}{2} L.i^2 = \frac{1}{2} L^2.w_0^2.C^2.u^2_{max}.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right)$

On constate que l'énergie stockée dans la bobine est aussi une fonction périodique. Mais elle est déphasée par rapport à l'énergie électrique: quand l'énergie électrique est maximale, l'énergie magnétique est minimale et vice versa.
On retrouve sur la représentation graphique les oscillations de cette énergie.

On additionne les deux expressions des energies électriques et magnétiques et on obtient l'énergie totale dans un circuit LC:

$$W = W_E + W_M = \frac{1}{2} C.u_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right) + \frac{1}{2} L.w_0^2.C^2.u^2_{max}.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right)$$

On rappelle $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ce qui donne $w_0^2.L.C = 1$ soit $W = \frac{1}{2} C.u_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right) + \frac{1}{2} C.u_m^2 . \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} + \phi_0\right)$

Ce qui nous donne $W = \frac{1}{2} C.u_m^2 = \text{Constante} = \frac{1}{2} L.i_m^2$

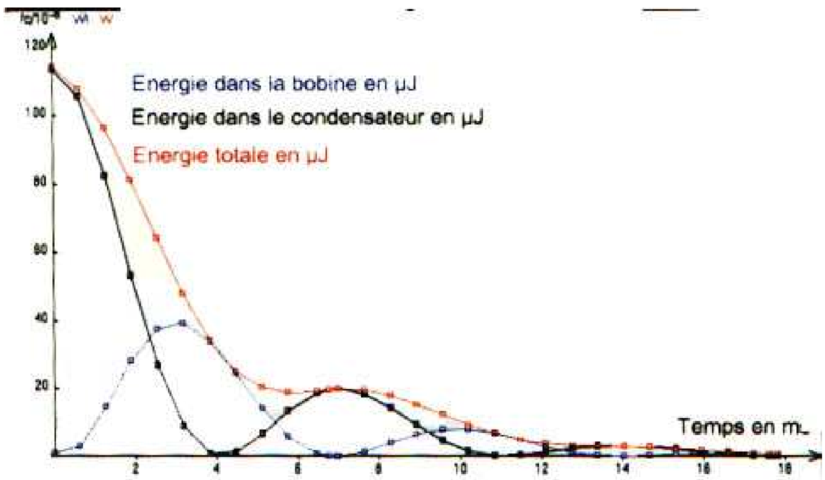
Lorsque la tension aux bornes du condensateur est maximale, et l'énergie W_E du condensateur maximale, l'intensité du courant et l'énergie W_M de la bobine sont nulles et vive versa.

Pendant les oscillations d'un circuit LC idéal, il y a conservation de l'énergie totale et transfert intégral de l'énergie emmagasinée dans la bobine vers le condensateur et vice versa. L'énergie totale se conserve.

3.2. ENERGIE D'UN CIRCUIT RLC.

L'amplitude des oscillations d'un circuit RLC décroît et le circuit perd de l'anergie par effet Joule.

Il y a toujours transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine mais avec pertes. L'énergie totale est progressivement dissipée.



4. OSCILLATIONS ELECTRIQUES AUTO-ENTRETENUES.

Pour entretenir les oscillations d'un circuit RLC série, il faut insérer dans le circuit une source d'énergie qui compense les pertes par transfert thermique dans le conducteur ohmique.

Un dipôle comportant un amplificateur opérationnel alimenté par un générateur et des résistances, permet d'entretenir les oscillations d'un circuit RLC qui conserve sa période propre. Le générateur électronique compense les pertes d'énergie par effet Joule.